

Composition en fréquence d'un signal périodique

1 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Fourier a montré que toute fonction périodique peut s'écrire sous la forme d'une superposition d'un nombre infini de sinusöide dont les fréquences sont des multiples de la fréquence de la fonction périodique. Cette somme est la décomposition du signal en *série de fourier*. Une fonction $s(t)$ de période T (de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$) peut s'écrire.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

a_0 est la **valeur moyenne** de $s(t)$ (c'est la *composante continue* du signal).
 Les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients de fourier et sont déterminés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

— On peut écrire :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)).$$

avec : $c_0 = a_0$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geq 1$ et $\tan \varphi_n = \frac{b_n}{a_n}$

Le terme sinusöidal de pulsation ω est appelé fondamental .

Le terme sinusöidal de pulsation $n\omega$ est appelé harmonique d'ordre n .

Le tracé $c_n = f(n)$ est appelé *spectre* de $s(t)$.

— On peut aussi utiliser la notation complexe :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \exp(jn\omega t)$$

avec

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \exp(-jn\omega t) dt$$

Si $s(t)$ est paire, alors $b_n = 0, \forall n$. Si $s(t)$ est impaire, alors $a_n = 0, \forall n$.

2 Valeur efficace

La valeur efficace d'un signal $s(t)$ est la racine carrée de sa moyenne quadratique (RMS : *Root Mean Square*) :

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

La valeur efficace d'une tension ou d'un courant alternatif est la valeur de la grandeur continue qui produirait le même effet thermique dans une résistance.

3 Valeur moyenne redressée

La **valeur moyenne redressée** d'une tension ou d'un courant alternatif est la valeur moyenne de sa valeur absolue.

Pour une tension périodique $u(t)$ de période T , la valeur moyenne redressée est définie par :

$$U_{\text{moy,red}} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

Le terme **redressée** signifie que les valeurs négatives du signal sont transformées en valeurs positives avant de calculer la valeur moyenne.

Cas d'une tension sinusoïdale

Considérons une tension sinusoïdale :

$$u(t) = U_{\text{max}} \sin(\omega t)$$

La valeur moyenne de cette tension sur une période est nulle :

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 0$$

En effet, la partie positive et la partie négative de la sinusoïde se compensent. Après redressement, on considère :

$$|u(t)| = U_{\text{max}} |\sin(\omega t)|$$

La valeur moyenne redressée devient alors :

$$U_{\text{moy,red}} = \frac{1}{T} \int_0^T U_{\text{max}} |\sin(\omega t)| dt$$

Pour une tension sinusoïdale, on obtient :

$$U_{\text{moy,red}} = \frac{2}{\pi} U_{\text{max}}$$

Numériquement :

$$U_{\text{moy,red}} \simeq 0,637 U_{\text{max}}$$

Comparaison avec la valeur efficace

Pour une tension sinusoïdale, la valeur efficace est :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \simeq 0,707 U_{\text{max}}$$

alors que la valeur moyenne redressée est :

$$U_{\text{moy,red}} = \frac{2}{\pi} U_{\text{max}} \simeq 0,637 U_{\text{max}}$$

Ainsi, la valeur efficace caractérise l'effet énergétique du signal, tandis que la valeur moyenne redressée représente la moyenne de l'amplitude du signal après redressement.

Exemple

Pour une tension sinusoïdale de valeur maximale :

$$U_{\max} = 10 \text{ V}$$

la valeur moyenne redressée vaut :

$$U_{\text{moy,red}} = \frac{2}{\pi} \times 10$$

soit :

$$U_{\text{moy,red}} \simeq 6,37 \text{ V}$$

La valeur efficace vaut :

$$U_{\text{eff}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$U_{\text{eff}} \simeq 7,07 \text{ V}$$

4 Facteur de forme

On appelle *facteur de forme* le rapport :

$$F = \frac{S_{\text{eff}}}{s_m} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}}{\frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt}$$

Remarque :

Les appareils de mesure T.R.M.S. (*True Root Mean Square*) mesurent directement la valeur efficace du signal ; dans le cas contraire, l'appareil mesure la valeur moyenne redressée, et la multiplie par le facteur de forme du signal.

5 Théorème de Parseval

La modélisation spectrale donne, pour chaque harmonique du signal, l'énergie relative qui lui est associée. Ceci se retrouve de façon condensée dans le théorème de Parseval :

La valeur efficace S_{eff} du signal $s(t)$ est directement liée à la somme des composantes en série de Fourier par la relation de Parseval :

$$S_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|C_n|^2)$$

Intérêt pratique :

En physique, l'énergie associée à une grandeur physique f est généralement proportionnelle à f^2 :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, E_p = \frac{1}{2}kr^2, E_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2, E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \dots$$

L'égalité de Parseval montre que l'énergie du signal est entièrement décrite dans les composantes du développement de Fourier. Ce qui justifie leur utilisation sans perte d'information (l'énergie) sur le système.

6 Applications

6.1 Fonction créneau

Déterminer le développement de Fourier de la fonction créneau défini par :

$e(t) = \begin{cases} E_0, & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ On considère le signal périodique de période T défini par :

$$e(t) = \begin{cases} E_0, & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{si } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

La pulsation fondamentale est :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

Le développement en série de Fourier s'écrit sous la forme :

$$e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

avec :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

et :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

1. Calcul du coefficient a_0

Comme $e(t) = E_0$ pour $0 < t < T/2$ et $e(t) = 0$ pour $T/2 < t < T$:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E_0 dt$$

Ainsi :

$$a_0 = \frac{2E_0}{T} [t]_0^{T/2}$$

d'où :

$$\boxed{a_0 = E_0}$$

La composante continue du signal est donc :

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{E_0}{2}}$$

2. Calcul des coefficients a_n

On a :

$$a_n = \frac{2E_0}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt$$

Donc :

$$a_n = \frac{2E_0}{T} \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2}$$

Or :

$$\omega_0 \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} = \pi$$

Par conséquent :

$$a_n = \frac{2E_0}{Tn\omega_0} \sin(n\pi)$$

Comme :

$$\sin(n\pi) = 0$$

on obtient :

$$\boxed{a_n = 0}$$

3. Calcul des coefficients b_n

On a :

$$b_n = \frac{2E_0}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt$$

Donc :

$$b_n = \frac{2E_0}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2}$$

Ainsi :

$$b_n = \frac{2E_0}{Tn\omega_0} [1 - \cos(n\pi)]$$

Or :

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

et :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Donc :

$$b_n = \frac{E_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

Si n est pair :

$$(-1)^n = 1$$

donc :

$$b_n = 0$$

Si n est impair :

$$(-1)^n = -1$$

donc :

$$b_n = \frac{2E_0}{n\pi}$$

On peut donc écrire :

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ \frac{2E_0}{n\pi}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

4. Développement en série de Fourier

Finalement :

$$e(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sous forme compacte :

$$e(t) = \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\omega_0 t]$$

Ainsi, le signal possède une composante continue égale à $E_0/2$ et uniquement des harmoniques impaires.

6.2 Réponse d'un circuit à une tension créneau

Que dire de la réponse à une tension créneau d'un circuit :

6.2.1 Réponse d'un filtre passe-bande à un créneau

Un filtre passe-bande centré sur la fréquence f_0 élimine notamment la **composante continue** $\frac{E_0}{2}$ ainsi que les harmoniques suffisamment éloignées de sa bande passante. Si la bande passante du filtre est suffisamment étroite pour ne conserver que la fréquence fondamentale f_0 , alors la tension de sortie est approximativement :

$$s(t) \simeq \frac{2E_0}{\pi} |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))]$$

où $H(j\omega_0)$ représente la fonction de transfert du filtre à la pulsation fondamentale :

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Si le gain du filtre à la fréquence f_0 est égal à 1 :

$$|H(j\omega_0)| = 1$$

et si son déphasage est nul :

$$\arg(H(j\omega_0)) = 0$$

alors :

$$s(t) \simeq \frac{2E_0}{\pi} \sin(\omega_0 t)$$

Ainsi, un **filtre passe-bande suffisamment sélectif** transforme le signal créneau en une sinusoïde correspondant à l'harmonique située dans sa bande passante.

Si le filtre sélectionne une harmonique

Par exemple, si le filtre passe-bande est centré autour de la fréquence $3f_0$, il sélectionne essentiellement la **troisième harmonique** du signal.

La tension de sortie est alors approximativement :

$$s(t) \simeq \frac{4E_0}{3\pi} |H(j3\omega_0)| \sin[3\omega_0 t + \arg(H(j3\omega_0))]$$

où $H(j3\omega_0)$ représente la fonction de transfert du filtre à la pulsation $3\omega_0$.

La fréquence de la troisième harmonique est :

$$f_3 = 3f_0$$

La sortie est donc encore approximativement sinusoïdale, mais sa fréquence est égale à $3f_0$.

6.2.2 Réponse d'un filtre passe bas à un creneau

Un **filtre passe-bas** laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences. Il conserve notamment la composante continue du signal.

Chaque harmonique du signal d'entrée est multipliée par la fonction de transfert du filtre à la fréquence correspondante.

La sortie s'écrit donc :

$$s(t) = \frac{E_0}{2} H(0) + \frac{2E_0}{\pi} \left[|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)) + \frac{1}{3} |H(j3\omega_0)| \sin(3\omega_0 t + \arg H(j3\omega_0)) + \frac{1}{5} |H(j5\omega_0)| \sin(5\omega_0 t + \arg H(j5\omega_0)) + \dots \right]$$

Cas où $f_0 < f_c < 3f_0$

Si la fréquence de coupure f_c vérifie :

$$f_0 < f_c < 3f_0$$

le filtre laisse essentiellement passer la composante continue et la fréquence fondamentale f_0 , tandis que les harmoniques $3f_0$, $5f_0$, ... sont fortement atténuées.

La sortie devient approximativement :

$$s(t) \simeq \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)]$$

Si le gain du filtre à la fréquence f_0 est proche de 1 :

$$|H(j\omega_0)| \simeq 1$$

et si son déphasage est négligeable :

$$\arg H(j\omega_0) \simeq 0$$

alors :

$$s(t) \simeq \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \sin(\omega_0 t)$$

La sortie est donc approximativement une sinusoïde de fréquence f_0 , décalée verticalement de $\frac{E_0}{2}$.

Cas où $3f_0 < f_c < 5f_0$

Si la fréquence de coupure vérifie :

$$3f_0 < f_c < 5f_0$$

le filtre conserve approximativement la composante continue, la fondamentale f_0 et la troisième harmonique $3f_0$.

En supposant un gain proche de 1 et un déphasage négligeable pour ces fréquences, on obtient :

$$s(t) \simeq \frac{E_0}{2} + \frac{2E_0}{\pi} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right]$$

Plus la fréquence de coupure f_c est faible, plus le signal créneau est **lissé**.

Plus la fréquence de coupure f_c est élevée, plus le filtre conserve d'harmoniques et plus le signal de sortie ressemble au signal créneau d'entrée.

6.2.3 Réponse d'un filtre passe haut à un créneau

Un filtre passe-haut de fréquence de coupure f_c atténue les fréquences telles que :

$$f < f_c$$

et laisse passer les fréquences telles que :

$$f > f_c$$

En particulier, la composante continue correspond à $f = 0$. Elle est donc éliminée :

$$H(0) = 0$$

La sortie générale du filtre est :

$$s(t) = \frac{2E_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{|H(jn\omega_0)|}{n} \sin[n\omega_0 t + \arg(H(jn\omega_0))]$$

Exemple : $f_0 < f_c < 3f_0$

Si la fréquence de coupure vérifie :

$$f_0 < f_c < 3f_0$$

la composante continue et la fréquence fondamentale f_0 sont fortement atténuées, tandis que les harmoniques :

$$3f_0, \quad 5f_0, \quad 7f_0, \quad \dots$$

sont davantage transmises.

Dans le cas d'un filtre passe-haut idéal, on obtient :

$$s(t) \simeq \frac{2E_0}{\pi} \left[\frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

Le signal de sortie n'est donc généralement pas sinusoïdal, car plusieurs harmoniques de hautes fréquences peuvent être transmises.

Cas d'un filtre passe-haut RC

Pour un filtre passe-haut RC, la fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

La fréquence de coupure est donnée par :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Dans le domaine où le filtre se comporte comme un dérivateur, on a approximativement :

$$s(t) \simeq RC \frac{de(t)}{dt}$$

Or, un signal créneau varie essentiellement au niveau de ses fronts.

Ainsi :

— Au **front montant** :

$$0 \longrightarrow E_0$$

on obtient une impulsion positive.

— Au **front descendant** :

$$E_0 \longrightarrow 0$$

on obtient une impulsion négative.

Schématiquement :

créneau $\xrightarrow{\text{filtre passe-haut}}$ pics positifs et négatifs aux fronts

Ainsi, un filtre passe-haut élimine la composante continue et atténue les basses fréquences du créneau. Dans le régime dérivateur, il met principalement en évidence les transitions rapides du signal.

6.3 Fonction triangulaire

Déterminer le développement de Fourier de la fonction triangulaire définie par :

$$e(t) = \begin{cases} 2E_0 \frac{t}{T}, & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ 2E_0(1 - \frac{t}{T}), & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$