

Electrostatique dans le vide
1. Champ électrostatique
(a) Charges

La charge est la caractéristique d'un corps ou d'une particule qui lui fait subir l'interaction électrostatique.

La charge élémentaire est $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$

La charge de tout corps est multiple de la charge élémentaire.

L'interaction électrostatique est l'interaction entre particules chargées fixes dans un référentiel donné.

Pour caractériser la répartition de la charge dans le volume, on utilise la densité volumique de charge : $\rho(M) = \frac{dq}{d\tau}$.

De même on caractérise une surface chargée par la densité surfacique de charge : $\sigma = \frac{dq}{ds}$

De même on caractérise une courbe chargée par la densité linéique de charge : $\lambda = \frac{dq}{dl}$

(b) Loi de Coulomb

Dans le vide :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

où ϵ_0 est la permittivité diélectrique du vide ; et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 910^9 \text{ USI}$

Dans un milieu isolant, homogène et isotrope (pas de direction privilégiée), on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. exemple : $\epsilon_r = 80$.

(c) Champ électrostatique

Le champ électrostatique crée par une charge ponctuelle q placée en O , au point M , est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

en coordonnées sphériques. $\vec{OM} = r \vec{u}_r$

Le champ électrostatique crée par une distribution de charge ponctuelle q_i placée en O_i , au point M , est :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \text{avec} \quad \vec{O_i M} = r_i \vec{u}_i$$

Le champ électrostatique crée par une distribution continue de charge, au point M , est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribution de charge}} \frac{dq}{PM^3} \vec{PM}$$

attention!! il s'agit bien d'une intégrale vectorielle.

2. Potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique est défini par : $dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$

Le potentiel crée par une charge ponctuelle est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{avec} \quad V(\infty) = 0$$

Le potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charge, au point M, est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distribution de charge finie}} \frac{dq}{r}$$

3. Théorème de Gauss

Enoncé : *Le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée S est égale à la somme des charges intérieures à S, divisée par ϵ_0 .*

Formulation :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{int}/S}}{\epsilon_0}$$

Pour appliquer le théorème de Gauss, il faut utiliser les raisons de symétrie :

Symétrie $\Rightarrow$ la direction de $\vec{E}$. (choix de la normale à la surface de Gauss)

Invariance $\Rightarrow$ les variables du module de $\vec{E}$. (Choix de la forme de la surface de Gauss).

4. Considérations sur les symétries et les invariances

$\vec{E}$ est un vrai vecteur (ou vecteur polaire),

il est indépendant de l'orientation choisie

il est contenu dans un plan de symétrie de la distribution de charge.

5. Analogie avec la gravitation

Grandeur électrostatique	Grandeur gravitationnelle
charge q	
champ électrostatique	
Potentiel électrostatique	
ϵ_0	
charge volumique	
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$	
thm de Gauss	

6. Applications

Exercice : 1 *Equation aux dimensions*

Déterminer la dimension de ϵ_0 .

Exercice : 2 *Deux charges ponctuelles sur l'axe Ox*

Une charge $+q$ est placée en B, d'abscisse $+a$ et une charge $-q$ est placée en A, d'abscisse $-a$.

Calculer le champ $\vec{E}$ créé par la distribution de charges en tout point de l'axe, et tracer $\vec{E} \cdot \vec{u}_x$ en fonction de x .

Exercice : 3 *Sphères électrisées*

Soient deux sphères en cuivre de rayon $a = 1\text{mm}$ séparées par une distance $d = 10\text{cm}$ et portant toutes les deux une charge q .

- Calculer la charge sachant que l'intensité de la force de répulsion entre les deux sphères vaut 10^{-7}N .
- Calculer le nombre N_1 d'électrons perdus par chaque sphère lors de son électrisation. On donne la charge de l'électron $e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.
- Soit N_2 le nombre d'atomes de cuivre contenu dans chaque sphère supposée pleine. On donne le nombre d'Avogadro $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$, la masse molaire du cuivre $M = 63,5\text{gmol}^{-1}$, sa masse volumique $\mu = 8,9 \cdot 10^3\text{kg.m}^{-3}$.
 - Calculer N_2 et le rapport $\frac{N_1}{N_2}$.
 - Si l'on admet que se sont les atomes situés à l'extérieur de chaque boule qui sont ionisés, calculer l'épaisseur moyenne de cuivre ionisé sur chaque sphère. Commenter

Exercice : 4 *Sphère chargée non uniformément en surface*

Soit une sphère de centre O et de rayon R , qui porte la densité de charge $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Déterminer le potentiel et le champ électrostatique au centre de la sphère.

Exercice : 5 *Disque chargé*

Un disque de rayon a porte une densité superficielle de charge σ uniforme. Calculer le champ électrostatique en un point de l'axe du disque où on voit le rayon du disque sous l'angle α .

Quel est le rayon d'un disque portant une densité superficielle de charge σ uniforme tel que le champ électrostatique sur son axe à la distance b ne diffère que de 1% du champ d'un plan infini ?

Exercice : 6 *Distribution volumique de charge*

Une distribution de charge est répartie en volume avec une densité volumique nulle si $|x| > a$ et égale à ρ si $|x| < a$.

Démontrer par des arguments précis tout ce que la symétrie impose au champ électrostatique.

Calculer le champ et le potentiel électrostatique dans tout l'espace.

Exercice : 7 *Distribution volumique de charge*

Soit une boule de centre O et de rayon R dont la densité volumique de charge obéit à $\rho(r) = \rho_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$.

- 1) Quelle est la charge dq d'une coquille sphérique de rayon r et d'épaisseur dr ?
En déduire la charge totale q de la boule.
- 2) Déterminer le champ et le potentiel électrostatique créés par cette boule en tout point de l'espace ?

Exercice : 8 *Champ électrique créée par deux plans infinis parallèles chargés*

- (a) Déterminer le champ électrique créé par un plan infini portant la densité de charge surfacique de charge uniforme σ .
- (b) Soient deux plans parallèles infinis séparés par la distance e , portant les densités surfaciques de charge uniformes respectivement σ et σ .
 - Déterminer le champ électrique créé par les deux plans en tout point de l'espace. On montrera que $\vec{E}$ est uniforme par morceaux.
 - Calculer la discontinuité de $\vec{E}$ au passage des plans.
 - Calculer le rapport $C = \frac{q}{eE_{int}}$ où q est la charge totale portée par le plan et E_{int} est le module de $\vec{E}$ entre les deux plans.

Exercice : 9 *Champ électrique dans une cavité*

Soit une sphère, de centre O et de rayon R_1 portant une densité volumique de charge uniforme, sauf dans une cavité sphérique, délimitée par la surface de centre O' de rayon R_2 tel que $OO' = d$, ($d < R_2$).

Calculer $\vec{E}$ en tout point de la cavité.

7. Le dipôle électrostatique

(a) Potentiel et champ électrostatique créée par un dipôle électrostatique :

Le dipôle électrostatique est système de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ placées respectivement aux points P et N . Le moment dipolaire est : $\vec{p} = q\vec{NP}$. p s'exprime en C.m dans le système international.

Pour les systèmes de taille et de charge d'un ordre de grandeur comparable à ceux de l'atome, on utilise, comme unité du moment dipolaire le **Debye** avec :

$$1D = \frac{1}{3}10^{-29}C.m$$

✓ Quelques valeurs de p :

Liaison	p(en D)
C-H	0
O-H	1.51
N-H	1.31
Cl-H	1.08
C-O	0.75
C-Cl	1.57

exercice : Calculer le moment dipolaire de la molécule d'eau sachant que : l'angle $\widehat{HOH} = 105^\circ$

Etudier la symétrie du système, en déduire le système de coordonnées le plus adapté ?

Soit O le milieu de NP et $\theta = (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM})$ M un point de l'espace. $r = |\overrightarrow{OM}|$.
 En utilisant **l'approximation dipolaire** : $r \gg a$

Montrer que le potentiel au point M est donnée par :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

et que le champ électrostatique est :

$$\begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

Lignes de champ et surfaces équipotentielles :

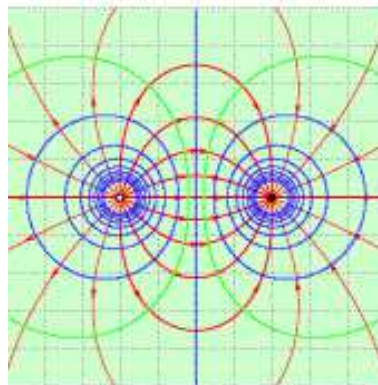
Les lignes de champ sont les courbes tangente à $\vec{E}$ en ses points.

Montrer :

- que les équations des lignes de champ sont données par : $r = \lambda \sin^2(\theta)$

- et que les surfaces équipotentielles sont données par : $r^2 = \beta \cos(\theta)$.

Tracer l'allure des lignes de champ et les surfaces équipotentielles.



(b) Action d'un champ électrostatique sur le dipôle électrostatique :

i. Actions exercées par un champ électrique extérieur sur le dipôle

Si le champ électrostatique $\vec{E}_{ext}$ est **quasiuniforme**, on montre que la force et le moment subis par le dipôle sont donnés par :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}(O)$$

Dans le cas où le champ électrique extérieur est **uniforme**, on déduit que :

$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}, \end{cases} \Rightarrow \text{pas de mouvement de translation}$$

Le dipôle subit l'action d'un couple qui tend à l'orienter parallèlement au champ électrique.

Le dipôle est donc en équilibre si $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ c.à.d $\vec{p} \parallel \vec{E}_{ext}$.

Stabilité de l'équilibre :

L'équilibre est stable si $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ ont le même sens. Sinon l'équilibre est instable.

ii. **Énergie potentielle du dipôle**

On montre facilement, que l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ électrostatique extérieur est :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

Retrouver l'étude de la stabilité.