

Mécanique des solides

1 Cinétique des solides

1.1 Définition d'un solide

En mécanique, un solide est un objet indéformable, M_1 et M_2 deux points du solide vérifient :

$$\overrightarrow{M_1 M_2}^2 = cte$$

. d'où

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2} = 0$$

Deux cas se présentent :

ou bien $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{cte}$ c'est le mouvement de translation pur
ou bien $\overrightarrow{M_1 M_2} \perp d\overrightarrow{M_1 M_2}$ c'est le mouvement de rotation.

1.2 Centre de masse, référentiel barycentrique

1.2.1 Centre de masse

Par définition le centre de masse G d'un solide est :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{solide} \overrightarrow{OM} dm}{m}$$

Exemple : Centre de masse d'un demi-disque

Considérons un demi-disque homogène de rayon R .

Par raison de symétrie, le centre de masse G appartient à l'axe de symétrie du demi-disque.

Ainsi :

$$x_G = 0$$

Pour déterminer y_G , on utilise la définition du centre de masse :

$$y_G = \frac{\iint_d emi - disque y dS}{\iint_d emi - disquedS}$$

L'aire du demi-disque est :

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

En coordonnées polaires :

$$y = r \sin \theta \quad et \quad dS = r dr d\theta$$

avec :

$$0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

On obtient alors :

$$y_G = \frac{2}{\pi * R^2} \int_0^\pi \int_0^R r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta$$

soit :

$$y_G = \frac{2}{\pi * R^2} \left(\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 \, dr \right)$$

Donc :

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \times 2 \times \frac{R^3}{3}$$

D'où :

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

La distance entre le centre O du cercle et le centre de masse du demi-disque est donc :

$$OG = \frac{4R}{3\pi}$$

Numériquement : $OG \simeq 0,424R$

1.2.2 Référentiel barycentrique R^*

C'est le référentiel d'origine le centre de masse du solide et qui est en mouvement de translation par rapport au référentiel R .

✓ Remarque : R^* n'est pas forcément galiléen

1.3 Résultante cinétique

C'est la quantité de mouvement totale du solide notée $\vec{P}$. pour la déterminer ***on traite chaque point M du solide entouré par la masse élémentaire dm comme un point matériel***, donc de quantité de mouvement $\vec{dp} = \overrightarrow{v(M/R)} dm$, par suite :

$$\vec{P} = \int_{\text{solide}} \vec{dp} = \int_{\text{solide}} \overrightarrow{v(M/R)} dm = m \overrightarrow{V(G)}$$

✓ Remarque : $\vec{P}^* = \vec{0}$

1.4 Energie cinétique d'un solide, 1^{ière} théorème de Koenig

On montre que :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m \overrightarrow{v(G/R)}^2$$

E_c^* est l'énergie cinétique du solide dans R^*

$\frac{1}{2} m \overrightarrow{v(G/R)}^2$ est l'énergie cinétique du mouvement d'ensemble des points du solide dans R .

1.5 Moment cinétique d'un solide, 2^{iè} théorème de Koenig

On montre que :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}^* + m\vec{OG} \wedge \vec{v}(G/R)$$

Remarque :

$$\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^*$$

Résultat très important, le mouvement du solide par rapport à R^* est un mouvement de rotation.

1.6 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

1.6.1 Définition

Le moment d'inertie I_Δ du solide par rapport à un axe Δ est $I_\Delta = \int_{solide} \overrightarrow{HM}^2 dm$, où H est la projection orthogonale du point M sur l'axe Δ .

✓ Remarque : Le moment d'inertie s'exprime, dans le système international, par $kg.m^2$

1.6.2 Théorème de Hygens

montrer que :

Δ_G axe passant par G, Δ axe quelconque parallèle à Δ_G et à la distance séparant les deux axes.

1.6.3 Applications

✓ Disque par rapport à son axe

Par définition :

$$I_\Delta = \int r^2 dm$$

où r représente la distance de l'élément de masse dm à l'axe Δ .

Le disque étant homogène, sa masse surfacique σ est constante :

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$

Considérons une couronne élémentaire de rayon r et d'épaisseur dr . L'aire de cette couronne élémentaire est :

$dS = 2\pi r dr$ Le moment d'inertie élémentaire est :

$$dI_\Delta = r^2 dm$$

Le moment d'inertie total du disque est alors :

$$I_\Delta = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \frac{R^4}{4}$$

Finalement :

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$$

✓ Disque par rapport à son diamètre

On place le disque dans le plan (Oxy) et on choisit le diamètre Δ suivant l'axe Ox .

Pour un élément de masse dm situé au point $P(x, y)$, la distance de cet élément à l'axe Ox est $|y|$.

Par définition, le moment d'inertie par rapport à Ox est :

$$I_{Ox} = \iint_S y^2 dm$$

En coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Le moment d'inertie devient alors :

$$I_{Ox} = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin \theta)^2 \sigma r dr d\theta = \sigma \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr$$

D'où :

$$I_{Ox} = \sigma \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_0^R r^3 dr$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi = \sigma \pi \frac{R^4}{4}$$

Finalement :

$$I_{Ox} = \frac{1}{4}MR^2$$

Ainsi, le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à l'un de ses diamètres est :

$$I_{\text{diamètre}} = \frac{1}{4}MR^2$$

Remarque : le disque est plus rapide en mouvement de roulement qu'en mouvement de rotation par rapport à son diamètre (pivotement).

1.6.4 Rotation d'un solide par rapport à un axe fixe

Considérons un solide en mouvement de rotation par rapport à un axe de rotation Δ .

✓ Energie cinétique du solide

$$E_c = \frac{1}{2}I_{\Delta}\omega^2$$

✓ Moment cinétique du solide

$$\sigma_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \omega$$

avec : $\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_o \cdot \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe de rotation

2 Cinématique des solides

2.1 Degré de liberté d'un solide

On sait que chaque solide possède 6 degrés de libertés : 3 pour la translation x_G, y_G, z_G et 3 pour la rotation (angles d'Euler).

2.2 Champ de vitesse d'un solide

M_1 et M_2 sont deux points du solide.

$$\overrightarrow{V(M_2)} = \overrightarrow{V(M_1)} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Interprétation de la loi du champ des vitesses

Pour un solide indéformable, les vitesses de deux points A et B du solide sont liées par la relation :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\Omega}$ représente le vecteur vitesse angulaire du solide.

Cette relation montre que le mouvement instantané d'un solide peut être considéré comme la combinaison d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation :

$$\text{Mouvement du solide} = \text{Translation} + \text{Rotation}$$

Le terme :

$$\vec{V}_A$$

représente la vitesse de translation associée au point A , tandis que le terme :

$$\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$$

représente la contribution de la rotation du solide.

On peut également écrire :

$$\vec{V}_B - \vec{V}_A = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$$

Ainsi, la vitesse relative de B par rapport à A est :

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$$

Comme le produit vectoriel $\vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$, on a :

$$(\vec{V}_B - \vec{V}_A) \perp \overrightarrow{AB}$$

Cela signifie que les points A et B ne peuvent ni se rapprocher ni s'éloigner l'un de l'autre. La distance AB reste donc constante, ce qui traduit le caractère indéformable du solide.

Cas d'une translation pure

Dans le cas d'une translation :

$$\vec{\Omega} = \vec{0}$$

La loi du champ des vitesses devient :

$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{V}_A}$$

Tous les points du solide possèdent donc la même vitesse à un instant donné.

Cas d'une rotation autour d'un axe fixe

Si le solide tourne autour d'un axe fixe et si le point A appartient à cet axe, alors :

$$\vec{V}_A = \vec{0}$$

La loi du champ des vitesses devient alors :

$$\boxed{\vec{V}_B = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{AB}}$$

La norme de la vitesse d'un point situé à une distance d de l'axe de rotation est :

$$\boxed{V_B = \omega d}$$

Ainsi, tous les points du solide ont la même vitesse angulaire ω , mais leur vitesse linéaire dépend de leur distance à l'axe de rotation.

Plus un point est éloigné de l'axe de rotation, plus sa vitesse linéaire est grande.

Par conséquent

L'axe de rotation est un axe qui passe par un point fixe du solide et qui est colinéaire au vecteur vitesse de rotation.

3 Dynamique des solides

3.1 Théorème de la résultante cinétique TRC

3.1.1 Dans un référentiel galiléen

$$\boxed{m \overrightarrow{a(G/R)} = \overrightarrow{F_{\text{ext}}}}$$

3.1.2 Dans un référentiel non galiléen

$$\boxed{m \overrightarrow{a(G/R)} = \overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}}$$

avec $\overrightarrow{F_{ie}} = - \int_{\text{solide}} \overrightarrow{a_e(M)} dm$ et $\overrightarrow{F_{ic}} = - \int_{\text{solide}} \overrightarrow{a_c(M)} dm$

3.2 Théorème du moment cinétique TMC

3.2.1 Dans un référentiel galiléen

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}(\vec{F}_{ext}/O)$$

avec O fixe dans R.

3.2.2 Dans un référentiel non galiléen

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O'}}{dt} = \vec{M}(\vec{F}_{ext}/O') + \vec{M}(\vec{F}_{ie}/O') + \vec{M}(\vec{F}_{ic}/O')$$

avec O' un point fixe dans R' non galiléen.

Dans R* :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} = \vec{M}(\vec{F}_{ext}/G) \text{ même si } R^* \text{ n'est pas galiléen.}$$

3.3 Théorème de l'énergie cinétique TEC

3.3.1 Dans un référentiel galiléen

$$dEc = \delta W(\vec{F}_{ext})$$

3.3.2 Dans un référentiel non galiléen

$$dEc = \delta W(\vec{F}_{ext}) + \delta W(\vec{F}_{ie})$$

3.4 Contact entre deux solides, Lois de Coulomb

3.4.1 Vitesse de glissement

Vitesse de glissement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact au point I .

La **vitesse de glissement** de S_1 par rapport à S_2 au point de contact I est la vitesse relative du point de contact appartenant à S_1 par rapport au point de contact appartenant à S_2 .

Elle est définie par :

$$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/R) - \vec{V}(I, S_2/R)$$

On peut également écrire :

$$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I, S_1/S_2)$$

Cas du roulement sans glissement

Lorsqu'il n'y a pas de glissement entre les deux solides, la vitesse de glissement au point de contact est nulle :

$$\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$$

Par exemple, pour une roue roulant sans glisser sur un sol fixe, si I est le point de contact entre la roue et le sol, alors :

$$\vec{V}(I, \text{roue}/\text{sol}) = \vec{0}$$

Si, au contraire,

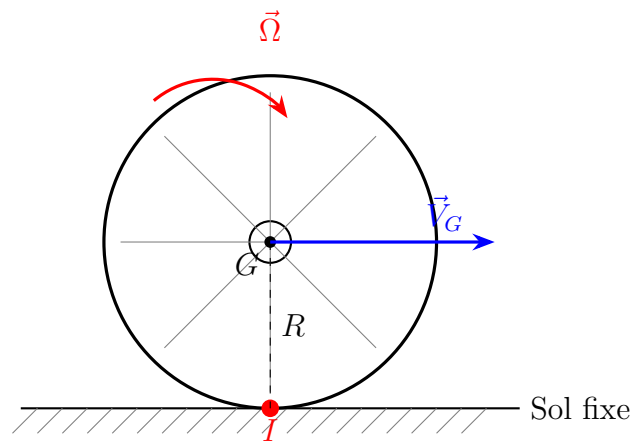
$$\vec{V}_g(S_1/S_2) \neq \vec{0},$$

alors les deux solides glissent l'un par rapport à l'autre au point de contact.

Exemple : vitesse de glissement d'une roue sur un sol fixe

Considérons une roue de rayon R se déplaçant sur un sol fixe. Son centre G possède une vitesse $\vec{V}_G$ et la roue tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

Soit I le point de la roue en contact avec le sol.



D'après la loi du champ des vitesses :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \times \vec{GI}$$

Comme le sol est fixe :

$$\vec{V}(I, \text{sol}/R) = \vec{0}$$

La vitesse de glissement de la roue par rapport au sol est donc :

$$\vec{V}_g = \vec{V}(I, \text{roue}/R) = \vec{V}_I$$

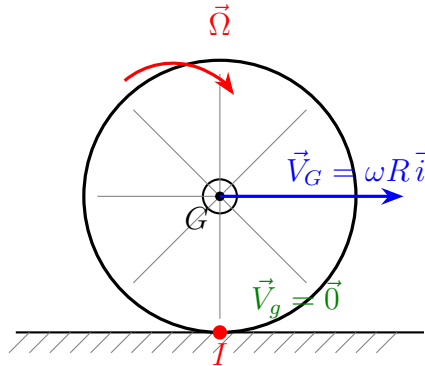
Dans le cas d'un mouvement rectiligne :

$$V_g = V_G - \omega R$$

1. Roulement sans glissement

Dans le cas d'un roulement sans glissement :

$$V_G = \omega R \quad \Rightarrow \quad V_g = 0$$



Le point I de la roue en contact avec le sol est instantanément immobile par rapport au sol :

$$\vec{V}_g = \vec{0}$$

Il n'y a donc pas de glissement.

2. Roulement avec glissement

Prenons par exemple :

$$V_G = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad R = 0,5 \text{ m}, \quad \omega = 15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

On obtient :

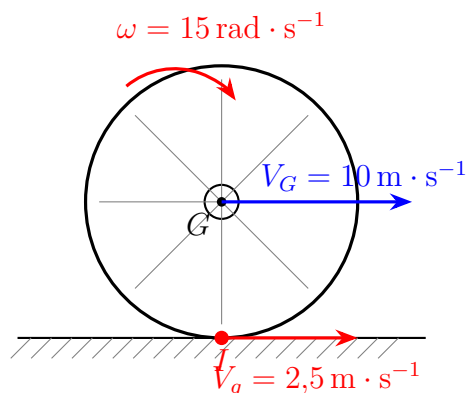
$$\omega R = 15 \times 0,5 = 7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Donc :

$$V_g = V_G - \omega R = 10 - 7,5$$

Ainsi :

$$V_g = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Comme :

$$V_g \neq 0$$

il y a glissement entre la roue et le sol.

3.4.2 Mouvement de roulement ; mouvement de pivotement

Mouvements de roulement et de pivotement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact au point I . On note $\vec{n}$ le vecteur normal au plan tangent commun aux deux solides au point de contact.

La vitesse angulaire relative des deux solides peut être décomposée en deux composantes :

$$\vec{\Omega}(S_1/S_2) = \vec{\Omega}_r + \vec{\Omega}_p$$

où $\vec{\Omega}_r$ représente la vitesse angulaire de roulement et $\vec{\Omega}_p$ la vitesse angulaire de pivotement.

1. Mouvement de roulement

On parle de **roulement** lorsque la vitesse angulaire relative possède une composante située dans le plan tangent au contact.

Le vecteur vitesse angulaire de roulement $\vec{\Omega}_r$ est donc perpendiculaire à la normale $\vec{n}$:

$$\vec{\Omega}_r \perp \vec{n}$$

La vitesse angulaire de roulement peut être obtenue par :

$$\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Ainsi, $\vec{\Omega}_r$ représente la composante de $\vec{\Omega}$ contenue dans le plan tangent au contact.

Exemple : une roue roulant sur un sol horizontal possède un mouvement de roulement puisque son axe de rotation est parallèle au plan du sol.

2. Mouvement de pivotement

On parle de **pivotement** lorsque la vitesse angulaire relative possède une composante suivant la normale au plan de contact.

Le vecteur vitesse angulaire de pivotement $\vec{\Omega}_p$ est donc colinéaire à la normale $\vec{n}$:

$$\vec{\Omega}_p \parallel \vec{n}$$

La vitesse angulaire de pivotement est donnée par :

$$\vec{\Omega}_p = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

Ainsi, $\vec{\Omega}_p$ représente la composante de $\vec{\Omega}$ normale au plan tangent.

Exemple : une toupie tournant sur sa pointe peut présenter un mouvement de pivotement lorsque son axe de rotation est dirigé suivant la normale au sol.

À retenir

Roulement	: $\vec{\Omega}_r \perp \vec{n}$
Pivotement	: $\vec{\Omega}_p \parallel \vec{n}$

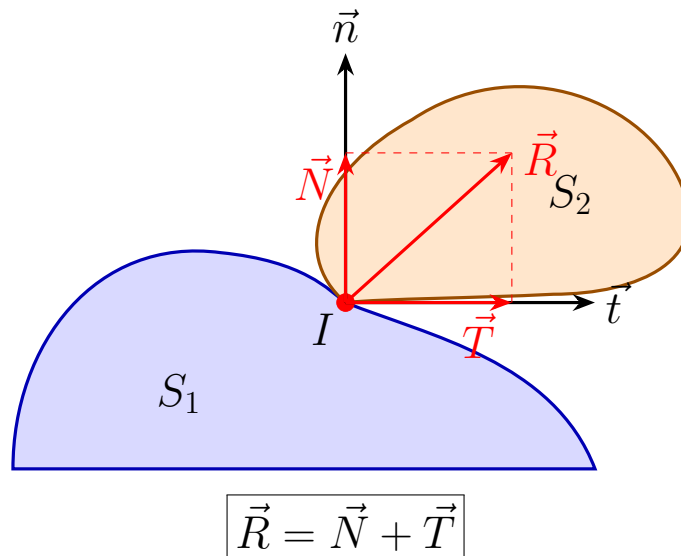
Il ne faut pas confondre le roulement et le pivotement avec le **glissement**. Le glissement est caractérisé par la vitesse relative au point de contact :

$$\vec{V}_g = \vec{V}(I, S_1/S_2)$$

alors que le roulement et le pivotement sont caractérisés par les composantes de la vitesse angulaire relative $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$.

3.4.3 Lois de coulomb pour le frottement de roulement

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact au point I . L'action de contact exercée par S_2 sur S_1 peut être décomposée en une composante normale et une composante tangentielle :



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

FIGURE 1 – Deux solides S_1 et S_2 en contact au point I .

où :

- $\vec{N}$ est la réaction normale au plan de contact ;
- $\vec{T}$ est la force tangentielle de frottement.

Lorsque les deux solides glissent l'un par rapport à l'autre, leur vitesse de glissement est non nulle :

$$\vec{V}_g \neq \vec{0}$$

Les lois de Coulomb permettent alors de caractériser la force de frottement.

3.4.3.1. Direction et sens de la force de frottement

La force de frottement $\vec{T}$ est tangente à la surface de contact et colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{V}_g$.

Elle est dirigée dans le sens opposé à la vitesse de glissement :

$$\vec{T} = -\frac{\vec{V}_g}{\|\vec{V}_g\|} \|\vec{T}\|$$

On a donc :

$$\vec{T} \cdot \vec{V}_g < 0$$

La force de frottement s'oppose ainsi au mouvement relatif des deux surfaces en contact.

3.4.3.2. Norme de la force de frottement

Lorsqu'il y a glissement, la norme de la force tangentielle de frottement est proportionnelle à la norme de la réaction normale :

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

où μ_d est le coefficient de frottement dynamique, appelé également coefficient de frottement de glissement.

En combinant la direction, le sens et la norme de la force de frottement, on obtient :

$$\vec{T} = -\mu_d \|\vec{N}\| \frac{\vec{V}_g}{\|\vec{V}_g\|}$$

À retenir

En présence de glissement :

$$\begin{aligned} \vec{V}_g &\neq \vec{0} \\ \vec{T} &\text{ est opposée à } \vec{V}_g \\ \|\vec{T}\| &= \mu_d \|\vec{N}\| \end{aligned}$$

Cas de l'adhérence

En absence de glissement :

$$\vec{V}_g = \vec{0}$$

la force de frottement vérifie :

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique.

3.4.4 Puissance de contact ponctuel

La réaction de contact est décomposée en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

La puissance des actions de contact entre les deux solides est donnée par :

$$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{R} \cdot \vec{V}_g + \vec{M}_I \cdot \vec{\Omega}_{1/2}$$

où :

$$\vec{V}_g = \vec{V}(I, S_1/S_2)$$

est la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 au point de contact I , $\vec{M}_I$ est le moment des actions de contact au point I et $\vec{\Omega}_{1/2}$ est la vitesse angulaire relative de S_1 par rapport à S_2 .

Cas d'un contact ponctuel sans moment de contact

Dans le cas d'un contact ponctuel idéal, on suppose que :

$$\vec{M}_I = \vec{0}$$

La puissance des actions de contact devient alors :

$$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{R} \cdot \vec{V}_g$$

Or :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

donc :

$$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{N} \cdot \vec{V}_g + \vec{T} \cdot \vec{V}_g$$

La vitesse de glissement étant tangente à la surface de contact, elle est perpendiculaire à la réaction normale :

$$\vec{N} \cdot \vec{V}_g = 0$$

Par conséquent :

$$\mathcal{P}_{1 \leftrightarrow 2} = \vec{T} \cdot \vec{V}_g$$

Cas du frottement de Coulomb

En présence de glissement, la force de frottement est opposée à la vitesse de glissement :

$$\vec{T} = -\mu_d N \frac{\vec{V}_g}{\|\vec{V}_g\|}$$

La puissance de contact devient :

$$\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = \vec{T} \cdot \vec{V}_g$$

d'où :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = -\mu_d N \|\vec{V}_g\|}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} \leq 0}$$

Le signe négatif traduit une dissipation d'énergie mécanique par frottement.

Cas du roulement sans glissement

Dans le cas du roulement sans glissement :

$$\vec{V}_g = \vec{0}$$

Pour un contact ponctuel idéal sans moment de contact, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1\leftrightarrow 2} = 0}$$

Ainsi, en absence de glissement, le contact ponctuel idéal ne dissipe pas d'énergie mécanique.