

TD Mécanique des solides

Exercice : 1 *Chute d'une tige sur le sol*

Une tige AB, homogène, de centre G et de longueur $2b$, est posée sur le sol horizontal, verticalement sans vitesse initiale. Sous l'action d'un léger déséquilibre, elle tombe. En supposant que l'extrémité A glisse sans frottement sur le sol.

1. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à la tige. En déduire la trajectoire du centre de masse de la tige.
2. Déterminer l'énergie cinétique de la tige et son énergie potentielle. En déduire une intégrale première.
3. Déterminer la vitesse $\vec{V}_G$ du centre G de la tige quand celle-ci heurte le sol.

On donne la valeur du moment d'inertie de la tige par rapport à sa médiatrice : $J = \frac{1}{3}mb^2$.

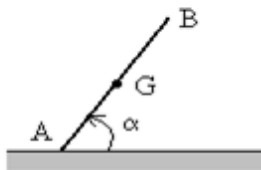


FIGURE 1 – Chute d'une tige

Exercice : 2 *Mouvement d'une barre appuyée contre un mur*

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une barre AB, homogène, de masse m , de longueur $2b$ et de centre G, milieu de AB, est posée sur le sol horizontal et repose contre un mur vertical. Sa position est déterminée par l'angle $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OG})$. Les contacts en A et en B sont supposés sans frottement.

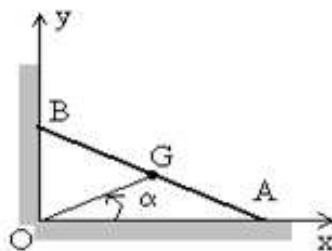


FIGURE 2 –

1. 1) Écrire l'intégrale première du mouvement en supposant, qu'à l'instant initial, la barre est immobile avec une inclinaison α_0 .
2. 2) Calculer la réaction du mur sur la barre $\vec{R}_B$, en déduire pour quelle inclinaison α_m la barre quitte le mur.

Exercice : 3 Oscillations d'un demi-disque sur un plan horizontal

On considère un demi-disque (D) homogène, de centre C, de centre de masse G, de rayon R et de masse m. Le référentiel terrestre (Oxyz) est supposé galiléen. Tout en restant dans le plan vertical (Oxy), le demi-disque roule sans glisser sur le plan horizontal. On désigne par I le point de contact entre le sol et (D). et on repère la position de (D) par l'abscisse x de C et par l'angle $\alpha = (\vec{CI}, \vec{CG})$. A l'instant initial, on lâche (D) sans vitesse initiale dans la position $\alpha = \alpha_0$. On donne $CG = b = \frac{4R}{3\pi}$ et que le moment d'inertie de (D) par rapport à un axe passant par C perpendiculaire à (D) vaut $J = \frac{1}{2}mR^2$.

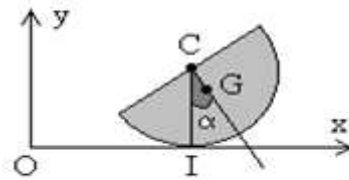


FIGURE 3 –

1. Ecrire une intégrale première du mouvement à l'aide de deux méthodes.
2. En déduire la période des petites oscillations.

Exercice : 4 Mouvement d'un chasse-neige

La figure schématise un chasse-neige se déplaçant sur une horizontale. Ce chasse-neige est constitué d'une roue S_1 (de centre d'inertie C, de rayon R, de masse m répartie uniformément sur la circonférence et de moment d'inertie $J = mR^2$ par rapport à son axe et d'une partie S_2 ($CABI_2$), indéformable de même masse m que la roue, de centre d'inertie A (on donne $CA = 2R$ $AI_2 = R$), en mouvement de translation parallèlement à l'axe Ox.

Le moteur exerce sur la roue un couple de moment $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$ (Γ constante positive). La roue tourne sans frottement autour de son axe et roule sans glisser sur le sol. On suppose que le coefficient de frottement de glissement f sur le sol est le même en I_1 et en I_2 (il vérifie $0.7 < f < 1$).

1. Appliquer :
 - (a) à l'ensemble, le théorème de la résultante dynamique
 - (b) à l'ensemble, le théorème du moment cinétique au centre de masse du chasse-neige.

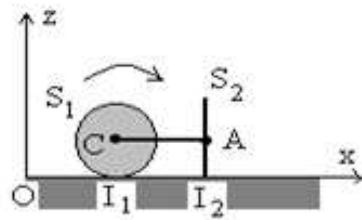


FIGURE 4 –

- (c) à la roue, le théorème du moment cinétique en C.
2. Ecrire les relations imposées par le roulement sans glissement en I_1 et le glissement en I_2 .
 3. Quelles conditions doit vérifier le moment Γ pour que le mouvement déterminé ci-dessus soit effectivement réalisé? On pourra supposer qu'à l'instant initial le chasse-neige est fixe.

Exercice : 5 *Mouvement d'une barre sur un axe horizontal*

(Oxyz) est un référentiel galiléen. Une barre homogène AB, de masse m , de longueur $2b$, de centre C, de moment d'inertie par rapport à un axe passant par C et perpendiculaire à la barre, est posée sur une tige de rayon négligeable, coïncidant avec l'axe Oz. Le contact

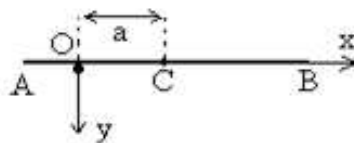


FIGURE 5 –

entre la barre et la tige est caractérisé par un coefficient de frottement f . A l'instant initial, on lâche la barre sans vitesse initiale dans la position horizontale ($0 < OC < b$). Pour quelle inclinaison α_m la barre commence t'elle à glisser sur la tige?

Exercice : 6 *Mouvement d'un cylindre sur un plan incliné*

Un cylindre homogène, de centre d'inertie C, de rayon R et de moment d'inertie (que l'on démontrera) par rapport à son axe, est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle sur l'horizontale, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On désigne par f le coefficient de frottement de glissement entre le cylindre et le plan incliné.

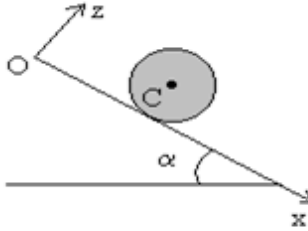


FIGURE 6 –

1. Déterminer l'accélération $\ddot{x}$ du cylindre. Montrer qu'il y a glissement ou non selon la valeur α .
2. Faire un bilan énergétique entre les instants 0 et t. Etudier le cas du mouvement sans glissement et celui avec glissement.

Exercice : 7 *Mouvement d'un point matériel dans un tuyau qui roule sans glisser*

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, un tuyau cylindrique de rayon R , de masse M , de moment d'inertie $J = MR^2$ par rapport à son axe, roule sans glisser sur le sol horizontal. A l'intérieur de ce tuyau glisse sans frottement, dans le plan vertical, un point matériel P de masse m . L'ensemble est repéré par l'abscisse x du centre C du tuyau et par l'angle $\theta = (\vec{CI}, \vec{CP})$ définissant la position du point matériel P .

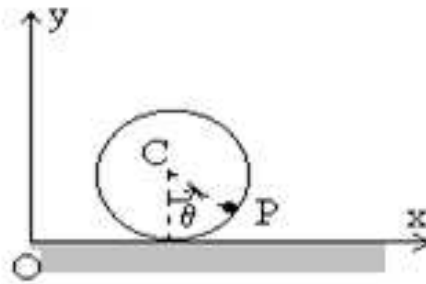


FIGURE 7 –

1. A l'instant initial, l'ensemble est immobile et $\theta = \theta_0$. Ecrire deux équations vérifiées par x et θ leurs dérivées. En supposant θ_0 petit, calculer la période des petites oscillations du système.
2. Le point matériel P de masse m est maintenant solidaire du tuyau. Calculer la période dans le cas de petites oscillations.

Exercice : 8 *Entraînement d'un cube par un cylindre*

Le cube glisse sans frottements sur le plan incliné et on considère que la poulie a une masse négligeable et tourne sans frottements autour de son axe de rotation. Le référentiel terrestre (R) est supposé galiléen. On considère le système constitué par un cube de masse M (solide S_1) et par un cylindre homogène de masse m , de centre C , et de rayon a (solide S_2). Un fil inextensible et sans masse est attaché à une face du cube et enroulé autour du cylindre. On note $\vec{T} = T\vec{e}_y$ la force exercée par le fil sur le cylindre en A.

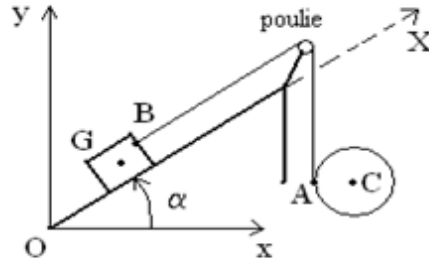


FIGURE 8 –

Le système est abandonné sans vitesse initiale, le fil n'étant ni lâché, ni tendu, le brin entre la poulie et le cylindre étant parfaitement vertical et celui entre la poulie et le cube parallèle au plan incliné. On note $\vec{\omega}(S_2/R = \dot{\theta}\vec{e}_z$.

1. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cylindre. En déduire que le mouvement de C est vertical.
2. Appliquer le théorème du moment dynamique au cylindre par rapport à C.
3. Sachant que la poulie roule sans glisser sur le fil en A, trouver une relation entre l'intensité vitesse du centre C, l'intensité de la vitesse de translation v_t du cube, a et $\dot{\theta}$.
4. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au cube.
5. En déduire les accélérations de G et C. Discuter suivant les valeurs de α .

Exercice : 9 *Déplacement d'un camion sur un sol horizontal*

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le chauffeur d'un camion (tracteur+benne) immobile sur une route horizontale a coupé le moteur, mais a oublié de serrer ses freins. Il fait alors basculer la benne d'un angle α à un angle α_0 . La masse du tracteur est notée M , celle de la benne est notée m . On note A le centre de masse du tracteur, B celui de la benne et G celui du camion. Le camion est posée sur ses 4 roues, chacune de centre C_k et de masse négligeable, tournant sans frottements autour de leur axe respectif.

On note $\vec{R}_k = N_k\vec{e}_y + T_k\vec{e}_x$ les réactions du sol sur la roue au niveau de chacun des points de contact camion-sol.

1. Appliquer le théorème du moment dynamique à une roue et en déduire la direction des forces de contact entre le camion et le sol.
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au camion entier. Qu'en déduisez vous pour le centre de masse G du camion.

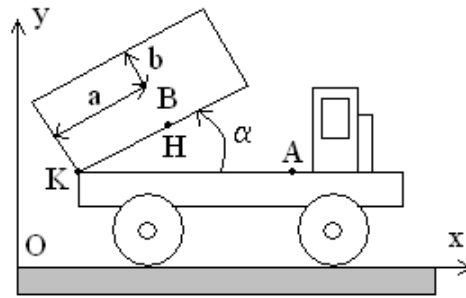


FIGURE 9 –

3. En déduire le déplacement horizontal d du centre de masse A du tracteur.

Exercice : 10 *Tiges articulées et guidées*

Un système constitué de deux tiges homogènes OA et AB , de même masse m et de même longueur $2a$, reliées entre elles par une articulation cylindrique parfaite d'axe horizontal Ay . On désigne par Ox une tige horizontale fixe. La tige OA est articulée parfaitement autour de l'axe Oy et l'extrémité B coulisse sans frottement sur Ox . On suppose que la réalisation matérielle du système est telle que rien ne s'oppose à ce que θ puisse prendre des valeurs négatives, voir la figure .

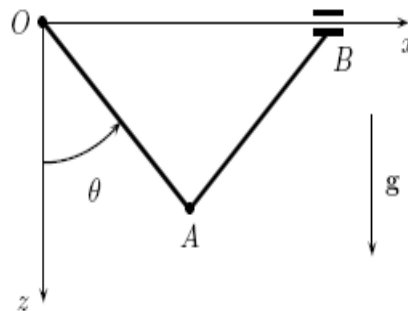


FIGURE 10 –

1. Etablir une équation différentielle caractérisant le mouvement.
2. Déterminer la pulsation des petites oscillations.

Exercice : 11 *Oscillateur de Timochenko*

Deux cylindres parallèles, de même rayon R , dont les axes fixes et horizontaux sont disposés à la distance $l > 2R$ l'un de l'autre dans un même plan horizontal, sont animés d'un mouvement de rotation uniforme à la même vitesse angulaire ω en sens inverse l'un de l'autre (cf. figure 11). Une planche homogène, de masse m , de faible épaisseur, de grande longueur, glisse sur les deux cylindres avec le même coefficient de frottement f . On appelle x la position du centre d'inertie de la planche repérée par rapport à l'origine O du repère.

On désigne par $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. On donne aussi $f = 0,5$, $m = 1 \text{ kg}$, $l = 5m$, $R\omega = 1 \text{ m s}^{-1}$.

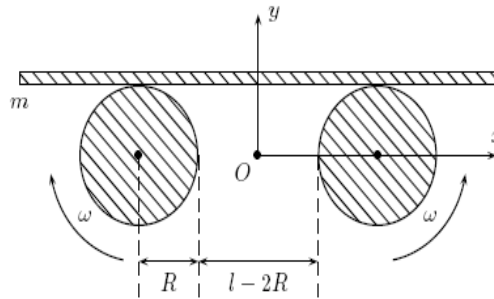


FIGURE 11 –

1. Exprimer les réactions normales et tangentielles exercées sur la planche aux deux points de contact en fonction de x , g , m , l et f .
2. La planche est abandonnée sans vitesse initiale.
 - (a) Quelle est la période des oscillations ?
 - (b) Quel est le signe de la puissance moyenne des actions de contact ?
 - (c) Pourquoi le dispositif ne s'arrête-t-il pas ? Commenter quantitativement.
3. (a) Quelle est la plus grande valeur x_{max} possible pour la position initiale x_0 (avec $\dot{x}(0) = 0$) ?
- (b) Que se passe-t-il si $|x_0| > |x_{max}|$? On précisera en particulier la durée de la phase anharmonique.