

TD Equations de Maxwell dans le vide
Exercice : 1 *Courant de déplacement et courant de conduction*

On considère un milieu de conductivité γ pour lequel le courant de conduction $\vec{j}$ est lié à $\vec{E}$ par $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. On suppose que γ a la même valeur en régime alternatif qu'en régime permanent et le milieu considéré a les mêmes constantes ϵ_0 et μ_0 que le vide.

Pour un champ électrique $\vec{E}$ alternatif de pulsation ω , calculer le rapport des amplitudes du courant de conduction $\vec{j}$ et du courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Pour $\omega = 2\pi 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, calculer ce rapport dans les différents cas suivants :

1. Pour le cuivre ($\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$).
2. Pour un sol argileux ($\gamma = 10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$).
3. Pour du verre ($\gamma = 10^{-6} \text{ S.m}^{-1}$).

Exercice : 2 *Champ électrique induit par un solénoïde*

Un solénoïde très long comporte n spires jointives bobinées par unité de longueur sur un cylindre de rayon a et d'axe $(O, \vec{u}_z)$.

1. Déterminer le champ électrique induit par un courant $i(t)$ variable circulant dans le solénoïde. Examiner la limite des régimes sinusoïdaux de basse et haute fréquences.
2. Déterminer le vecteur de Poynting ainsi que la puissance rayonnée à travers une longueur l du solénoïde.
3. Déterminer l'énergie électromagnétique stockée dans une longueur l de solénoïde. Que vaut le rapport de l'énergie électrique E_e sur l'énergie magnétique E_m dans l'approximation des régimes quasistationnaires.
4. En déduire la puissance fournie par le champ aux porteurs de charges.

Exercice : 3 *Décharge d'un condensateur plan*

Un condensateur plan est formé de deux disques conducteurs de même rayon a de quelques centimètres et de même axe Oz. Les disques portent des charges $q(t)$ et $-q(t)$. Ils sont séparés par une distance e . On néglige tout effet de bord en supposant le champ électrique uniforme et les lignes de champ magnétique circulaires d'axe Oz. On suppose qu'il se décharge dans un circuit résistif, en régime lentement variable tel que le champ électrique obéit à : $E(z) = E_0 \exp(-t/\tau)$. On le suppose uniforme dans tout le volume du condensateur, c'est à dire indépendant de r .

1. Déterminer le champ magnétique correspondant sous la forme $\vec{B} = B(r, t) \vec{e}_\theta$. Donner l'expression de B en fonction de E , r et τ .
2. En un point du volume du condensateur, exprimer en fonction de r et de $\lambda = c\tau$ le rapport des contributions électrique et magnétique à la densité d'énergie électromagnétique.
3. Montrer que, pour un régime lentement variable (concept que l'on précisera), il est bien légitime de considérer un condensateur comme un système purement électrique (c'est à dire non magnétique).
4. Calculer le vecteur de Poynting en un point intérieur au condensateur et commenter la direction de celui-ci.

- Donner l'expression du flux de ce vecteur, à travers le cylindre de rayon a et de hauteur h en fonction de E , et du volume V de ce cylindre. Interpréter le résultat précédent à l'aide d'un bilan énergétique.

Exercice : 4 *Etude électromagnétique d'un condensateur sphérique*

Un condensateur sphérique est constitué de deux armatures métalliques parfaitement conductrices, sphériques, concentriques, de centre O et de rayons a et $b > a$. L'espace compris entre ces armatures est rempli d'un milieu conducteur de conductivité γ . On cherche pour ce système un champ électromagnétique variable, respectant la symétrie sphérique : $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r$ à l'exclusion de toute composante statique. On suppose aussi qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur était chargé : $\iint \sigma(t = 0, r = a) dS = Q_0$.

- Montrer que le champ magnétique est nul pour des raisons de symétrie.
- Etablir et résoudre les équations vérifiées par le champ électromagnétique.
- Définir et calculer la constante de temps du système.
- Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par ce système. Établir le bilan local des puissances pour ce système. Quelle est la constante de temps pour les puissances ?
- Établir l'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur pour une date t quelconque.
- En déduire l'expression de la puissance dissipée par effet Joule entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.

Exercice : 5 *Puissance transportée par un câble coaxial*

On considère un câble coaxial dont le milieu vide est limité par une âme métallique cylindrique de rayon a et d'axe Oz et une gaine cylindrique coaxiale et de rayon b ($a > b$). L'étude s'effectue en régime permanent. On cherche des solutions des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques sous la forme : $\vec{E}(r) = f(r) \vec{e}_r$ et $\vec{B}(r) = g(r) \vec{e}_\theta$.

- Montrer que f et g sont solutions des équations de Maxwell, et donner leurs expressions . On rappelle la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{1}{r} \frac{\partial r E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Relier f à la différence de potentiel U entre les armatures et g à l'intensité I transportée par l'armature interne.
- Calculer le vecteur de Poynting et calculer son flux à travers une section droite de câble.