

TD : Propagation dans les milieux

Problème : 1 *Ionosphère*

La haute atmosphère de la Terre est partiellement ionisée (dans la zone dite ionosphère) et se présente sous forme d'ions positifs et d'électrons, à raison de $n = 10^{12} m^{-3}$. Les électrons par unité de volume.

1. Montrer que la conduction ionique est négligeable devant la conduction électronique. Pour cela, on établira l'expression de la vitesse et de la conductivité correspondant aux ions et aux électrons. On montrera qu'on peut négliger les forces magnétiques devant les forces électriques, si le plasma est peu dense.

On considère la propagation d'ondes planes : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

2. Déterminer la relation de dispersion pour la propagation d'une onde plane dans ce milieu.
3. Déterminer la vitesse de phase, la vitesse de groupe et la fréquence de coupure f_0 de l'onde.
4. A.N. : Déterminer la fréquence de coupure, déterminer l'écart relatif entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse correspondante dans le vide, pour une onde de fréquence égale à 100 MHz.
5. On suppose $f > f_0$. Calculer le vecteur de Poynting moyen. On fera l'hypothèse d'une vibration rectiligne.
6. Déterminer aussi la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique w_{em} . Déterminer enfin la densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons e_c .
7. Comparer vitesse de l'énergie et vitesse de groupe.

Problème : 2 *Communications sous-marines*

Le plan (xOy) horizontal sépare l'air, assimilé au vide, situé au dessus de ce plan, et de l'eau, assimilé à un milieu légèrement conducteur, de conductivité γ , de permittivité relative ϵ_r : on remplace dans les équations de Maxwell ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$. Au voisinage de l'interface entre l'eau et l'air, on envisage la propagation d'une onde électromagnétique plane dont le champ électrique vérifie $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\omega t - k_x y - k_z z)}$ dans le vide, et $\vec{E}' = E'_0 \vec{e}_x e^{i(\omega' t - k'_x y - k'_z z)}$ dans l'eau.

1. Exprimer les relations vérifiées par $k_x, k_z \omega$ (respectivement $k_x, k_z \omega'$) et les constantes de l'énoncé. On notera c_0 la célérité de la lumière dans le vide.
2. Exprimer les relations vérifiées à l'interface des deux milieux.
3. L'onde incidente provient de l'air à grande distance et arrive vers la surface sous l'incidence θ à la fréquence 100 kHz. Peut-on évaluer la profondeur de pénétration de cette onde dans l'eau ? On prendra $\gamma = 5 S m^{-1}$, $\epsilon_r = 80$. Quelle est l'influence de θ ?
4. Comment choisir la fréquence d'une onde électromagnétique pour communiquer avec un sous-marin en plongée ? Quel inconvénient présente ce choix ?
5. On se place maintenant dans le cas de l'incidence normale, $\theta = 0$. Calculer la puissance cédée par unité de surface à l'eau de mer pour une onde de fréquence 100 kHz de champ électrique efficace $10^{-3} V m^{-1}$. Commenter.

Problème : 3 *Conduction dans un câble coaxial*

On considère un câble coaxial constitué de la façon suivante :

- l'âme du câble est un cylindre conducteur de rayon a_1 , de résistivité ρ .
- l'armature externe est une couronne cylindrique de rayon intérieur a_2 et d'épaisseur e , de résistivité ρ .
- l'espace entre l'âme et la gaine est occupé par un isolant imparfait de résistivité ρ' .

Soit x l'abscisse d'un plan de section du câble. On adopte le modèle suivant :

- dans l'âme et la gaine, le vecteur courant est uniforme. En régime permanent, l'intensité en tout point de l'âme est notée $i(x)$.
- les sections d'abscisse x de l'âme ou de la gaine sont équipotentielles. On désigne par $v(x)$ la différence de potentiel $v(\text{âme}) - v(\text{gaine})$.
- les lignes de courant dans l'isolant imparfait sont radiales et leur répartition présente la symétrie de révolution.

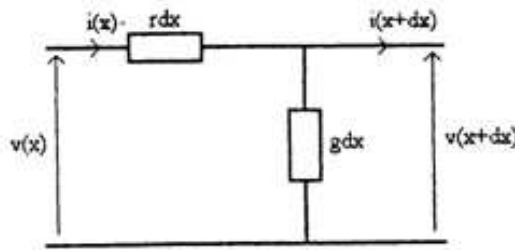


FIGURE 1 –

1 Régime continu

I.1- Calculer les résistances R_1 et R_2 (respectivement) d'un élément de longueur h de l'âme et de la gaine. En déduire les résistances r_1 et r_2 par unité de longueur. On posera pour toute la suite $r = r_1 + r_2$.

I.2- Calculer la conductance G d'un élément isolant de longueur h , puis la conductance g par unité de longueur en fonction de a_1 , a_2 et ρ' .

I.3 - On modélise ainsi la tranche de longueur dx : écrire les équations différentielles vérifiées par $v(x)$ et $i(x)$; On pose $rg = k_1^2$. Résoudre ces équations sachant qu'on impose à l'origine $x = 0$, $v(0) = V_0$ et que le câble, de longueur l est fermé sur la résistance $RC = r/k_1$. Définir et calculer la résistance R_e d'entrée du câble.

A.N. : $a_1 = 0,8\text{mm}$; $\rho = 1,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$; $a_2 = 3,5\text{mm}$; $\rho' = 5 \cdot 10^8 \Omega \cdot \text{m}$; $e = 0,2\text{mm}$ Calculer r_1 , r_2 , g , R_c , R_e , k_1 .

2 PROPAGATION D'UN SIGNAL

II.1- On suppose que l'isolant présente la permittivité diélectrique ϵ_0 et la perméabilité magnétique μ_0 du vide.

a/ Pour un condensateur cylindrique coaxial, de même géométrie que le câble ci-dessus, portant la charge par unité de longueur λ , calculer le champ électrique E en un point M distant de r compris entre a_1 et a_2 de l'axe de révolution. En déduire la capacité C d'un segment de câble de longueur h , puis la capacité Γ par unité de longueur. Que vaut Γ/g ?

b/ Si l'âme est traversée par un courant constant I , calculer le champ magnétique B en tout point du même espace. En déduire l'inductance L d'un segment de câble de longueur h , puis l'inductance Λ par unité de longueur. Calculer aussi le $\Gamma\Lambda$.

II.2- On admet que r , g , Γ et Λ sont indépendants de la fréquence et que celle-ci est assez faible pour que les lois des régimes permanente s'appliquent à chaque instant. On modifie le modèle précédent du segment dx pour aboutir au schéma suivant :

Les grandeurs v et i s'écrivent maintenant $v(x,t)$ et $i(x,t)$. Etablir les nouvelles équations différentielles donnant $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ et $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$ en fonction de v , i , $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$

II.3 - En déduire les deux équations différentielles vérifiées par $v(x,t)$ d'une part, et $i(x,t)$ d'autre part.

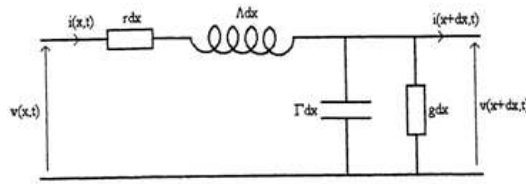


FIGURE 2 -

II.4- Dans ce paragraphe, on envisage que la ligne n'a pas de pertes ($r=0$; $g=0$). Montrer que les équations ci-dessus prennent la forme :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}; \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2};$$

on pose $= \Gamma \Lambda / c^2$.

a/ Chercher la forme générale de la solution de l'équation en $v(x,t)$. Pour cela on posera $p = t - x/c$ et $q = t + x/c$; v , ainsi que t et x deviennent fonction de p et q . Exprimer successivement $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ montrer qu'on aboutit à $v = f(p) + g(q)$, f et g étant des fonctions arbitraires. Quelle est la dimension de c ?

b/ Quelle est la signification physique des 2 types de solutions trouvées ?

c/ Pour une ligne infiniment longue parcourue par une onde progressive unique, montrer que l'impédance en un point définie par $Z(x,t) = v(x,t)/i(x,t)$ à une valeur Z_C indépendante du point considéré.

d/ Que se passe-t-il si l'on ferme une ligne de longueur finie l par l'impédance Z_C ?

II.5- On tient compte maintenant des pertes, mais on se restreint à des signaux sinusoïdaux. On pose $rg = k_1^2$; $\Gamma \Lambda = 1/c^2$; $g\Lambda + r\Gamma = 2k_2/c$. Pour une ligne infiniment longue soumise en $x = 0$ à une tension d'amplitude V_0 ($v(0,t) = V_0 e^{j\omega t}$) chercher une équation de propagation de la forme $v(x,t) = V_0 e^{-\alpha x} e^{j(kx - \omega t)}$.

a/ Trouver 2 relations liant α et k à ω et aux caractéristiques c , k_1 , k_2 de la ligne.

b/ Eliminer α entre ces 2 relations et en déduire une équation donnant k . Quelle est la solution physiquement acceptable ?

c/ A.N. : calculer k_1 , k_2 .

II.6- Quelle est la condition entre r , g , Γ , Λ , pour qu'il y ait proportionnalité de k à ω ? Quel intérêt y-a-t-il à ce que cette condition soit réalisée ? Montrer que cette relation s'exprime simplement en fonction de R_c (défini au I.3) et Z_c (défini au II.4 c/).

II.7- On s'intéresse maintenant au cas d'une ligne pour laquelle l'isolant est parfait ($g=0$). Que devient l'équation du II.5 conduisant à k ? Donner les expressions simplifiées de k et α , dans les 2 cas particuliers $\omega \gg k_2 c$, puis $\omega \ll k_2 c$. Calculer numériquement $\omega_1 = k_2 c$ puis l'atténuation pour une ligne de 1 km et 10 km dans chacun des cas.

3 ONDES STATIONNAIRES

Dans ce paragraphe, on revient au cas d'une ligne sans pertes et parcourue par des signaux sinusoïdaux de pulsation ω .

III.1 - Pour une ligne de longueur infinie, on superpose à l'onde v_1 , il d'amplitude V_0 se propageant dans le sens des $x > 0$, une onde v_2 , i_2 de même amplitude V_0 se propageant dans le sens inverse. Ecrire les expressions de v_1 , i_1 (en faisant apparaître l'impédance caractéristique Z_c) ; de v_2 , i_2 puis de $v = v_1 + v_2$ et $i = i_1 + i_2$. Montrer qu'il apparaît sur la ligne des ventres et des noeuds, de tension et de courant. Situer les ventres et les noeuds de tensions. Comparer les positions des noeuds respectivement en tension et en intensité.

III.2 - La ligne est maintenant de longueur finie l_0 et fermée en $x = 0$ par une impédance Z . Ecrire les expressions de v et de i en fonction des amplitudes V_1 et V_2 des ondes allant dans le sens des $x > 0$ ou des $x < 0$, respectivement. L'expression de i sera écrite en fonction de V_1 , V_2 et de Z_c .

Ecrire la condition qu'impose l'impédance Z en bout de ligne ($x = l_0$) et en déduire l'expression du rapport V_1/V_2 , en bout de ligne, en fonction de Z et Z_c . Discuter les cas particuliers $Z = Z_c$; $Z = 0$; $Z = \infty$.

Donner une analogie mécanique à ces situations ?