

TD Mécanique Quantique

Exercice : 1 Critère Quantique

On note S l'action qui est, le produit d'une énergie par un temps ou le produit d'une quantité de mouvement par une longueur et qui est une grandeur caractéristique homogène à $\hbar$ décidez si le recours à la physique quantique est nécessaire pour étudier les objets suivants ou si la théorie classique est suffisante :

1. Une antenne radio : puissance 5 kW et fréquence d'émission dans le domaine des ondes radio.
 2. Un noyau atomique : énergie de liaison typique 8 MeV, rayon $r_A = A^{\frac{1}{3}}r_0$ avec A le nombre de masse et $r_0 = 1,2 \text{ fm} = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ et masse d'un nucléon $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
 3. L'hélium superfluide : température de transition $T = 2,18 \text{ K}$, distance moyenne entre atomes $a = 0,36 \text{ nm}$ et masse $m = 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.
- On donne $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Exercice : 2 Oscillateur harmonique quantique

On considère une particule quantique, de masse m , soumise à une énergie potentielle de la forme $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Dans l'état stationnaire d'énergie E_0 , la fonction d'onde est de la forme $\psi(x, t) = A \exp(-\frac{x^2}{a^2}) \exp(-i\frac{E_0 t}{\hbar})$.

1. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps.
2. Déterminer la constante A .
3. Représenter l'allure de la densité de probabilité de présence de la particule. Commenter son allure par rapport à un oscillateur harmonique en mécanique classique, oscillant entre $-x_m$ et $+x_m$. Quelle est, sans calcul, la valeur de la position moyenne $\langle x \rangle$ de la particule quantique ?
4. Déterminer l'expression de E_0 et de a en fonction de $\hbar$, m et de ω .
On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Exercice : 3 Particule quantique dans un puits fini

Une particule de masse m est placée dans un puits de potentiel modélisé par : $V(x) = 0$ pour $-a < x < +a$ et $V(x) = V_0$ pour $|x| > a$.

1. On s'intéresse aux états liés. Quelles sont les valeurs limites possibles de l'énergie ?
2. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones. On pose $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ et $k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ et donner les expressions des fonctions d'onde dans les trois zones de l'espace.
3. Vu la forme du potentiel, on admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont soit paires, soit impaires.
En déduire les relations : $k \tan(ka) = k'a$ ou $k \cotan(ka) = -k'a$.
4. Etablir la relation $(ka)^2 + (k'a)^2 = \frac{2ma^2 V_0}{\hbar^2}$

5. Interpréter graphiquement les solutions dans le plan de coordonnées $(ka, k'a)$ à l'aide de la figure.

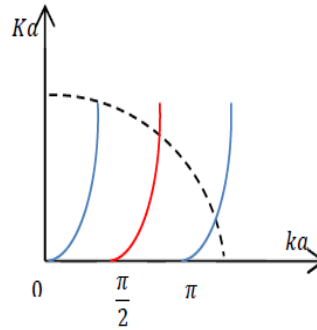


FIGURE 1 –

6. Existe-t-il toujours des états liés ? A quelle condition existe-t-il un seul état lié ?
 7. Que deviennent les solutions dans le cas où le puits devient très profond ?

Exercice : 4 *Diffraction de molécules par une onde lumineuse*

On considère une expérience de diffraction de molécules de fullerène C_{60} par une onde stationnaire lumineuse. Un four contenant la poudre de fullerène est chauffé à une température proche de 900K. Un dispositif permet de sélectionner dans le faisceau de fullerène sortant du four des molécules de vitesse moyenne égale à $v = 120 \text{ m.s}^{-1}$ et dont la dispersion relative de vitesse est $\frac{\Delta v}{v} = 0,17$. Le faisceau est collimaté par deux fentes verticales successives de largeur respectivement égales à $a = 7 \mu\text{m}$ et $b = 5 \mu\text{m}$ et séparées de $D' = 1,13 \text{ m}$. Le faisceau de molécules est ensuite diffracté par une onde stationnaire lumineuse. On admettra que du point de vue des molécules de fullerène, l'onde stationnaire lumineuse, agit comme un réseau plan de diffraction, constitué de N fentes, infiniment fines et équidistantes de $d = 257 \text{ nm}$. Un détecteur, situé à une distance $D = 1,20 \text{ m}$ après le réseau, permet de compter les molécules de C_{60} . Le dispositif expérimental est représenté à la figure 2 .

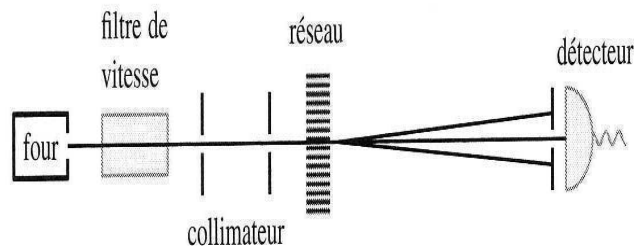


FIGURE 2 – diffraction

1. Déterminer la longueur d'onde de De Broglie λ_{DB} des molécules de fullerène qui sont sélectionnées par le filtre de vitesse.
2. Déterminer la dispersion $\Delta\lambda_{DB}$ de cette longueur d'onde de De Broglie.

3. Que représente la longueur $l_c = \frac{\Delta\lambda_{DB}}{\lambda_{DB}}$? Calculer sa valeur numérique.
4. Expliquer quel est l'intérêt des fentes de collimation. Préciser l'influence de la diffraction du faisceau moléculaire par chacune des deux fentes. La figure 3 représente un exemple de figure d'interférences obtenue expérimentalement.
5. On suppose que le détecteur permet d'observer les interférences à l'infini du faisceau moléculaire diffracté. Pour interpréter les résultats expérimentaux, on se ramène au schéma de la figure 2. On suppose que la longueur d'onde de De Broglie n'est pas modifiée par le passage à travers le réseau. Déterminer les directions θ pour lesquelles il y a interférences constructives des faisceaux diffractés.

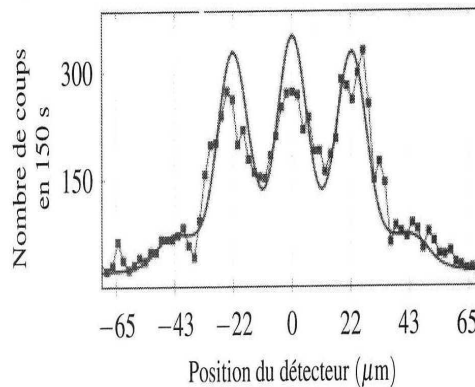


FIGURE 3 –

6. Interpréter l'allure de la courbe expérimentale de la figure 3. En déduire la valeur numérique de la vitesse moyenne des molécules de C_{60} et la comparer à la valeur donnée par les auteurs de l'expérience.
7. Montrer, en utilisant des arguments similaires à ceux développés dans le cours d'optique, que le défaut de cohérence temporelle du faisceau permet d'expliquer le nombre limité de franges visibles.

Exercice : 5 Atome d'hydrogène

Dans l'état fondamental, un électron en orbite autour d'un proton fixe en O est décrit par la fonction d'onde à symétrie sphérique $\phi(r) = A \exp(-\frac{r}{a})$, où a et A sont des constantes positives.

1. Quel est au premier ordre en dr , le volume dt compris entre les rayons r et $r + dr$?
2. En déduire la probabilité $dP = f(r)dr$ que la position de l'électron soit mesurée entre r et $r + dr$.
3. Proposer une valeur de A .
4. Pour quelle valeur r_0 de r la probabilité de trouver l'électron est-elle maximale (à dr près fixé) ?
5. Quelle est la valeur moyenne $\langle r \rangle$ dans cet état ?
6. Quelle quantité physique représente a ?
 On donne : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ pour $a > 0$.

Exercice : 6 *Expérience de SHIMIZU et TAKUMA*

En 1992, les physiciens japonais SHIMIZU et TAKUMA réalisaient une expérience d'interférences atomiques : un nuage d'atomes de néon (masse molaire $M = 20,12 \text{ g.mol}^{-1}$) est lâché sans vitesse initiale 76 mm au dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur $2\mu\text{m}$ et distantes de $e = 6,0\mu\text{m}$. Un détecteur MCP est situé à une distance $D = 113\text{mm}$ à l'aplomb du plan des fentes. Chaque point noir sur la plaque réceptrice représente l'impact d'un atome (fig.4) sur le détecteur.

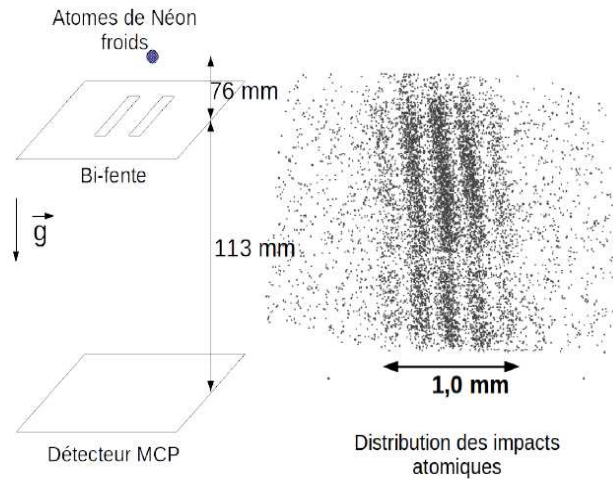


FIGURE 1 – Expérience de SHIMIZU et TAKUMA

FIGURE 4 –

1. En supposant que l'on peut traiter classiquement la chute des atomes de Néon, calculer la vitesse v_s de mouvement des atomes de Néon au niveau des fentes.
2. Vont-ils manifester un comportement (classiquement) ondulatoire ? Justifier.
3. Expérimentalement, on observe la figure d'interférences (fig.4) sur la plaque de détection. Mesurer l'interfrange i (la distance entre deux franges brillantes) de la figure d'interférence.
4. L'interfrange est lié à longueur d'onde des atomes de Néon par la relation : $i = \frac{hD2(\sqrt{1+\alpha}-1)}{mNev_s e \alpha}$ avec $\alpha = \frac{2gD}{v_s^2}$ Calculer la valeur théorique de i . Que penser du modèle ?