

TD3 Analyse de Fourier

Exercice : 1 *Multiplication par un signal crau*

1. Rappeler les expressions des fréquences et des amplitudes des cinq premiers harmoniques d'un signal crau de fréquence f_0 . On prise le produit de ce signal par le signal $s(t) = A(1 + \cos \omega t)$.
2. Quel est alors le spectre du signal obtenu ?

Exercice : 2 *Vibration quasi-monochromatique*

On prise la somme de trois vibrations monochromatiques $V_0(t)$ d'amplitude A_0 et de fréquence f_0 , $V_1(t)$ d'amplitude $\frac{A_0}{2}$ et de fréquence $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$ et $V_2(t)$ d'amplitude $\frac{A_0}{2}$ et de fréquence $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$.

1. Exprimer $V(t)$ en fonction de A_0 , f_0 et Δf .
2. Montrer que cette vibration peut être assimilée à une vibration quasi-monochromatique dans un cas que l'on précisera.

Exercice : 3 *Effet d'un filtre passe-bande*

On considère un filtre passe-bande de fréquence centrale $f_0 = 1200 \text{ Hz}$, de facteur de qualité $Q = 20$ et de gain maximum H_0 .

1. Donner la forme canonique de la fonction de transfert d'un tel filtre. Tracer l'allure de $H(f)$ et indiquer s'il vous paraît sélectif ou non.
2. On envoie en entrée de ce filtre un signal sinusoïdal de fréquence variable f_e . Pour quelles valeurs de la fréquence f_e a-t-on en sortie un signal non négligeable ? Pour quelle valeur de f_e le signal de sortie est-il maximal ?
3. Pour la suite de l'exercice, on pourra considérer que $Q \rightarrow \infty$. Quelle est la conséquence de cette hypothèse ?
4. On envoie maintenant en entrée du filtre, un signal modulé en amplitude dont la forme correspond à la multiplication des deux signaux $\beta_e \cos(2\pi f_e t + \varphi_e)$ et $\alpha_m + m \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$ avec $f_m < f_e$. Déterminer les valeurs de f_e et f_m qui permettent d'obtenir en sortie du filtre un signal non négligeable.
5. On utilise un signal crau périodique de fréquence $f_e = 1200 \text{ Hz}$. Y a-t-il en sortie un signal ? Si oui, donner la nature de ce signal ?
6. Le signal crau périodique précédent est de fréquence f_e variable par valeurs entières de 40 Hz à 400 Hz . Quelles sont les valeurs qui permettent d'obtenir en sortie un signal non négligeable ? On précisera la forme du signal obtenu en sortie du filtre.

Exercice : 4 *Développement en série de Fourier d'un champ magnétique*

Dans un dispositif de freinage utilisant des Foucault supportant les poids lourds ou les bus, un champ magnétique permanent est créé par une structure périodique d'aimants permanents. Le champ magnétique produit est de la forme :

$$\vec{B} = B_x(x, z)\vec{e}_x + B_z(x, z)\vec{e}_z$$

o $B_x(x, z)$ est une fonction paire en x et impaire en z et $B_z(x, z)$ impaire en x et paire en z . Étant donné la distribution des aimants, les composantes du champ magnétique peuvent être développées en série de Fourier :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{x,max}^{(n)} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) \quad B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{z,max}^{(n)} \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

1. Le champ magnétique n'est supposé aux seuls aimants, il obéit à $\Delta B_x = 0$ et $\Delta B_z = 0$. L'opérateur Δ se lit laplacien (scalaire ici). Trouver les équations différentielles vérifiées par $B_{x,max}^{(n)}$ et $B_{z,max}^{(n)}$.
2. En tenant compte des hypothèses de parités, proposer une solution pour chaque terme.
3. On sait que, tout champ magnétique possède une divergence nulle : $\text{div} \vec{B} = 0$. Montrer qu'alors les expressions de $B_x(x, z)$ et de $B_z(x, z)$ s'écrivent en fonction d'une seule série de coefficients A_n .
4. Le champ magnétique existant en $x = \frac{x_0}{2}$ est décrit par le graphique de la figure suivante :

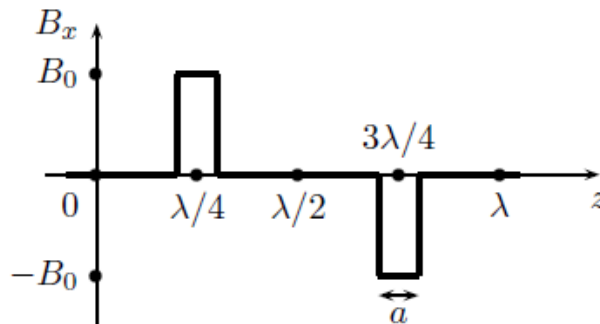


FIGURE 1 – Evolution spatiale du champ magnétique

Déterminer les coefficients A_n ainsi que les expressions complètes des composantes du champ magnétique.