

Corrigé – TD3 Analyse de Fourier

Exercice 1 : Multiplication par un signal créneau

On considère un signal créneau symétrique de fréquence f_0 et d'amplitude A .

Sa série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3} \sin(2\pi 3f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi 5f_0 t) + \dots \right].$$

1. Fréquences et amplitudes des cinq premières harmoniques

Seules les harmoniques impaires sont présentes.

Les cinq premières harmoniques non nulles ont donc pour fréquences :

$$f_0, \quad 3f_0, \quad 5f_0, \quad 7f_0, \quad 9f_0$$

et pour amplitudes respectives :

$$\frac{4A}{\pi}, \quad \frac{4A}{3\pi}, \quad \frac{4A}{5\pi}, \quad \frac{4A}{7\pi}, \quad \frac{4A}{9\pi}$$

2. Spectre du signal obtenu

On multiplie le signal créneau par :

$$s(t) = A_1(1 + \cos \omega t).$$

Le signal obtenu est :

$$u(t) = e(t)s(t) = A_1 e(t)(1 + \cos \omega t).$$

Posons :

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Pour une harmonique de fréquence nf_0 , on utilise :

$$\sin(2\pi nf_0 t) \cos(2\pi f t) = \frac{1}{2} [\sin 2\pi(nf_0 + f)t + \sin 2\pi(nf_0 - f)t].$$

Chaque harmonique initiale de fréquence nf_0 engendre donc trois composantes de fréquences :

$$nf_0, \quad nf_0 - f, \quad nf_0 + f$$

Le spectre initial est donc conservé et deux copies du spectre apparaissent, décalées respectivement de $-f$ et $+f$.

Exercice 2 : Vibration quasi-monochromatique

On considère les trois vibrations :

$$V_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t),$$

$$V_1(t) = \frac{A_0}{2} \cos \left[2\pi \left(f_0 - \frac{\Delta f}{2} \right) t \right],$$

et :

$$V_2(t) = \frac{A_0}{2} \cos \left[2\pi \left(f_0 + \frac{\Delta f}{2} \right) t \right].$$

La vibration résultante est :

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t).$$

1. Expression de $V(t)$

On utilise la relation trigonométrique :

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \cos a \cos b.$$

On obtient :

$$V_1(t) + V_2(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) \cos(\pi \Delta f t).$$

Par conséquent :

$$V(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) [1 + \cos(\pi \Delta f t)].$$

Or :

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Donc :

$$V(t) = 2A_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta f}{2} t \right) \cos(2\pi f_0 t)$$

2. Condition pour obtenir une vibration quasi-monochromatique

On peut écrire :

$$V(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

avec :

$$A(t) = 2A_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \Delta f}{2} t \right)$$

Si :

$$\Delta f \ll f_0$$

l'amplitude $A(t)$ varie lentement devant la vibration de fréquence f_0 .

La vibration est alors quasi-monochromatique et centrée autour de la fréquence f_0 .

Exercice 3 : Effet d'un filtre passe-bande

On donne :

$$f_0 = 1200 \text{ Hz}, \quad Q = 20, \quad H_0 = 1.$$

1. Forme canonique de la fonction de transfert

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande peut s'écrire :

$$H(f) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

Son module est :

$$|H(f)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}}$$

Le gain est maximal pour :

$$f = f_0.$$

Ainsi :

$$|H(f_0)| = H_0 = 1$$

La largeur de la bande passante est approximativement :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

Donc :

$$\Delta f = \frac{1200}{20} = 60 \text{ Hz}.$$

Ainsi :

$$\Delta f = 60 \text{ Hz}$$

Le filtre est donc relativement sélectif autour de la fréquence :

$$f_0 = 1200 \text{ Hz}.$$

2. Signal sinusoïdal en entrée

On applique à l'entrée :

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi f_e t).$$

Le signal de sortie est :

$$s(t) = E_0 |H(f_e)| \cos [2\pi f_e t + \arg H(f_e)].$$

Le signal de sortie est maximal lorsque :

$$f_e = f_0 = 1200 \text{ Hz}$$

Il devient négligeable lorsque f_e est suffisamment éloignée de la fréquence centrale f_0 .

3. Cas $Q \rightarrow +\infty$

La bande passante vaut :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

Lorsque :

$$Q \rightarrow +\infty,$$

on obtient :

$$\Delta f \rightarrow 0.$$

Le filtre devient alors parfaitement sélectif.

Ainsi :

$$\text{Seule la fréquence } f_0 \text{ est transmise.}$$

4. Signal modulé en amplitude

Le signal d'entrée correspond au produit :

$$e(t) = \beta_e \cos(2\pi f_e t + \varphi_e) [\alpha_m + m \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)].$$

En développant :

$$e(t) = \alpha_m \beta_e \cos(2\pi f_e t + \varphi_e)$$

$$+ m \beta_e \cos(2\pi f_e t + \varphi_e) \cos(2\pi f_m t + \varphi_m).$$

En utilisant :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)],$$

on obtient trois composantes fréquentielles :

$$f_e, \quad f_e + f_m, \quad |f_e - f_m|$$

Dans le cas $Q \rightarrow +\infty$, le filtre ne transmet qu'une composante située à f_0 .

Il faut donc que :

$$f_0 \in \{f_e, f_e + f_m, |f_e - f_m|\}$$

5. Signal créneau de fréquence $f_e = 1200 \text{ Hz}$

Un signal créneau symétrique possède uniquement des harmoniques impaires :

$$f_e, \quad 3f_e, \quad 5f_e, \quad 7f_e, \dots$$

Pour :

$$f_e = 1200 \text{ Hz},$$

les premières composantes sont :

$$1200, \quad 3600, \quad 6000, \quad 8400, \dots$$

Le filtre étant centré sur :

$$f_0 = 1200 \text{ Hz},$$

seul le fondamental est transmis.

Ainsi :

$$f_s = 1200 \text{ Hz}$$

et le signal de sortie est sinusoïdal.

Le filtre extrait donc le fondamental du signal créneau.

6. Fréquence du créneau réglable

Les fréquences présentes dans le spectre du signal créneau sont :

$$f_n = (2p + 1)f_e, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Pour qu'une harmonique soit transmise par le filtre, il faut :

$$(2p + 1)f_e = f_0.$$

Ainsi :

$$f_e = \frac{1200}{2p + 1}$$

avec :

$$40 \text{ Hz} \leq f_e \leq 2400 \text{ Hz}.$$

Les valeurs possibles correspondent à :

$$p = 0, 1, \dots, 14.$$

On obtient notamment :

$$f_e = 1200, 400, 240, 171, 4, 133, 3, 109, 1, \dots, 41, 4 \text{ Hz}$$

Dans tous ces cas, l'harmonique sélectionnée par le filtre possède la fréquence :

$$f_s = f_0 = 1200 \text{ Hz}$$

Le signal obtenu en sortie est donc sinusoïdal.

Exercice 4 : Développement en série de Fourier d'un champ magnétique

Le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B} = B_x(x, z)\vec{e}_x + B_z(x, z)\vec{e}_z.$$

Posons :

$$k_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

Les propriétés de parité données dans l'énoncé conduisent aux développements :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{x,\max}^{(n)}(x) \sin(k_n z),$$

et :

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{z,\max}^{(n)}(x) \cos(k_n z).$$

1. Équations différentielles

En dehors des aimants, le champ vérifie :

$$\Delta B_x = 0$$

et :

$$\Delta B_z = 0.$$

Considérons un terme de B_x :

$$B_x^{(n)} = B_{x,\max}^{(n)}(x) \sin(k_n z).$$

Le laplacien s'écrit :

$$\Delta B_x = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}.$$

Or :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sin(k_n z) = -k_n^2 \sin(k_n z).$$

On obtient donc :

$$\frac{d^2 B_{x,\max}^{(n)}}{dx^2} - k_n^2 B_{x,\max}^{(n)} = 0$$

De la même manière :

$$\frac{d^2 B_{z,\max}^{(n)}}{dx^2} - k_n^2 B_{z,\max}^{(n)} = 0$$

2. Solutions tenant compte des propriétés de parité

L'équation différentielle :

$$y'' - k_n^2 y = 0$$

possède comme solution générale :

$$y(x) = C_n e^{k_n x} + D_n e^{-k_n x}.$$

On peut également écrire :

$$y(x) = E_n \cosh(k_n x) + F_n \sinh(k_n x).$$

Comme B_x est impaire en x , on doit retenir la fonction $\sinh(k_n x)$.

Ainsi :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sinh(k_n x) \sin(k_n z)$$

Comme B_z est paire en x , on doit retenir la fonction $\cosh(k_n x)$.

Ainsi :

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cosh(k_n x) \cos(k_n z)$$

3. Utilisation de la condition $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Le champ magnétique possède une divergence nulle :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Or :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n A_n \cosh(k_n x) \sin(k_n z),$$

et :

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = - \sum_{n=1}^{+\infty} k_n C_n \cosh(k_n x) \sin(k_n z).$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} k_n (A_n - C_n) \cosh(k_n x) \sin(k_n z) = 0.$$

Par identification :

$$A_n = C_n$$

Les deux composantes du champ sont donc décrites à l'aide d'une seule série de coefficients A_n :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sinh\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

et :

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cosh\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

4. Détermination des coefficients A_n

À la position :

$$x = \frac{x_0}{2},$$

le graphique de l'énoncé représente un champ spatial périodique.

Sur une période $0 \leq z \leq \lambda$, on lit :

$$B_x\left(\frac{x_0}{2}, z\right) = \begin{cases} +B_0, & \frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4} + a, \\ -B_0, & \frac{3\lambda}{4} - a < z < \frac{3\lambda}{4}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Le coefficient de Fourier associé au terme sinusoïdal est :

$$b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda B_x\left(\frac{x_0}{2}, z\right) \sin(k_n z) dz.$$

Compte tenu de la forme du champ :

$$b_n = \frac{2B_0}{\lambda} \left[\int_{\lambda/4}^{\lambda/4+a} \sin(k_n z) dz - \int_{3\lambda/4-a}^{3\lambda/4} \sin(k_n z) dz \right].$$

Avec :

$$k_n = \frac{2\pi n}{\lambda},$$

on a :

$$\int \sin(k_n z) dz = -\frac{1}{k_n} \cos(k_n z).$$

On obtient alors :

$$b_n = \frac{2B_0}{\lambda k_n} \left[\cos\left(\frac{k_n \lambda}{4}\right) - \cos\left(k_n \left(\frac{\lambda}{4} + a\right)\right) \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{3k_n \lambda}{4}\right) - \cos\left(k_n \left(\frac{3\lambda}{4} - a\right)\right) \right].$$

Or :

$$B_x\left(\frac{x_0}{2}, z\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{\lambda}\right) \sin(k_n z).$$

Par identification :

$$b_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{\lambda}\right).$$

Donc :

$$A_n = \frac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi x_0}{\lambda}\right)}$$

avec :

$$b_n = \frac{2B_0}{\lambda} \left[\int_{\lambda/4}^{\lambda/4+a} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) dz - \int_{3\lambda/4-a}^{3\lambda/4} \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) dz \right]$$

Finalement, les deux composantes du champ sont :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sinh\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{2\pi n z}{\lambda}\right)$$

et :

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cosh\left(\frac{2\pi n x}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi n z}{\lambda}\right)$$