

Corrigé – TD1 : Électronique**Exercice 1 : Régime transitoire**

Avant la fermeture de l'interrupteur, les courants sont nuls et le condensateur est déchargé.

1. Valeurs juste après la fermeture

Avant la fermeture :

$$i(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0.$$

Le courant traversant une bobine ne peut pas subir de discontinuité. Ainsi :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0.$$

De même, la tension aux bornes d'un condensateur est continue :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0.$$

Le courant dans la résistance placée en parallèle avec le condensateur vaut :

$$i_2(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = 0.$$

Or :

$$i = i_1 + i_2.$$

Donc :

$$i(0^+) = i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$$

et :

$$u(0^+) = 0.$$

2. Valeurs en régime permanent

Lorsque :

$$t \rightarrow +\infty,$$

la bobine se comporte comme un court-circuit et le condensateur comme un circuit ouvert.

Le circuit équivalent contient alors deux résistances R en série.

Ainsi :

$$i(\infty) = \frac{E}{2R}.$$

Donc :

$$i(\infty) = \frac{E}{2R}$$

La tension u vaut :

$$u(\infty) = Ri(\infty).$$

Ainsi :

$$u(\infty) = \frac{E}{2}$$

Le condensateur ne laisse plus passer de courant :

$$i_1(\infty) = 0.$$

Le courant dans la résistance parallèle vaut :

$$i_2(\infty) = \frac{E}{2R}.$$

3. Équation différentielle vérifiée par u

La loi des nœuds donne :

$$i = i_1 + i_2.$$

Or :

$$i_1 = C \frac{du}{dt}$$

et :

$$i_2 = \frac{u}{R}.$$

Donc :

$$i = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}.$$

La loi des mailles donne :

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + u.$$

Or :

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}.$$

En remplaçant dans l'équation de la maille :

$$E = L \left(C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} \right) + R \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \right) + u.$$

Après simplification :

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC \right) \frac{du}{dt} + 2u = E$$

ou encore :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) \frac{du}{dt} + \frac{2}{LC} u = \frac{E}{LC}.$$

4. Condition correspondant au régime critique

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right) r + \frac{2}{LC} = 0.$$

Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant est nul :

$$\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 - \frac{8}{LC} = 0.$$

Ainsi :

$$\left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L} \right)^2 = \frac{8}{LC}$$

Posons :

$$x = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

On obtient :

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = 8.$$

Donc :

$$x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}.$$

D'où :

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0.$$

Les solutions sont :

$$x = \sqrt{2} \pm 1.$$

Par conséquent :

$$R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} (\sqrt{2} \pm 1).$$

5. Valeurs numériques de R

On donne :

$$C = 1,0 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$$

et :

$$L = 20 \text{ mH} = 20 \times 10^{-3} \text{ H}.$$

Ainsi :

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}}{10^{-6}}} \simeq 141,4 \Omega.$$

La première valeur est :

$$R_{c1} = 141,4(\sqrt{2} - 1).$$

Donc :

$$\boxed{R_{c1} \simeq 58,6 \Omega}$$

La seconde valeur est :

$$R_{c2} = 141,4(\sqrt{2} + 1).$$

Donc :

$$\boxed{R_{c2} \simeq 341,4 \Omega}.$$

6. Expression complète de la tension $u(t)$

En régime critique, l'équation caractéristique possède une racine double :

$$r = -\alpha.$$

Avec :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{LC}}.$$

Numériquement :

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\alpha = 10^4 \text{ s}^{-1}}$$

La solution générale s'écrit :

$$u(t) = \frac{E}{2} + (A + Bt)e^{-\alpha t}.$$

À $t = 0$:

$$u(0) = 0.$$

Donc :

$$0 = \frac{E}{2} + A$$

et :

$$A = -\frac{E}{2}.$$

De plus :

$$u'(0) = 0.$$

On obtient :

$$B = -\frac{\alpha E}{2}.$$

Finalement :

$$u(t) = \frac{E}{2} [1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}]$$

soit :

$$u(t) = \frac{E}{2} [1 - (1 + 10^4 t)e^{-10^4 t}].$$

7. Temps d'établissement à 1 %

La valeur finale est :

$$u(\infty) = \frac{E}{2}.$$

On cherche le temps tel que :

$$\frac{|u(t) - u(\infty)|}{u(\infty)} \leq 0,01.$$

Or :

$$\frac{|u(t) - u(\infty)|}{u(\infty)} = (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}.$$

Il faut donc résoudre :

$$(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} = 0,01.$$

On trouve approximativement :

$$\alpha t \simeq 6,64.$$

Donc :

$$t \simeq \frac{6,64}{10^4}.$$

Ainsi :

$$t_{1\%} \simeq 6,64 \times 10^{-4} \text{ s}$$

soit :

$$t_{1\%} \simeq 0,66 \text{ ms}.$$

Exercice 2 : Circuit $R - L$ parallèle

La loi des nœuds donne :

$$I_0 = i_R + i_L.$$

La résistance et la bobine étant en parallèle, elles possèdent la même tension :

$$u = Ri_R$$

et :

$$u = L \frac{di_L}{dt}.$$

Ainsi :

$$L \frac{di_L}{dt} = Ri_R.$$

Or :

$$i_R = I_0 - i_L.$$

Donc :

$$L \frac{di_L}{dt} = R(I_0 - i_L).$$

On obtient :

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} I_0$$

La constante de temps du circuit est :

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

À $t = 0$, le courant dans la bobine ne peut pas subir de discontinuité :

$$i_L(0) = 0.$$

La solution est donc :

$$i_L(t) = I_0 (1 - e^{-Rt/L})$$

Comme :

$$i_R = I_0 - i_L,$$

on obtient :

$$i_R(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

Ainsi :

$$i_R(0) = I_0, \quad i_R(\infty) = 0$$

et :

$$i_L(0) = 0, \quad i_L(\infty) = I_0.$$

La courbe $i_R(t)$ est une exponentielle décroissante tandis que $i_L(t)$ est une exponentielle croissante.

Exercice 3 : Circuit $R - L - C$ parallèle

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et :

$$Q = RC\omega_0.$$

1. Équation différentielle vérifiée par $i(t)$

La loi des nœuds donne :

$$i_R + i_C + i = 0.$$

Or :

$$i_R = \frac{u}{R}, \quad i_C = C \frac{du}{dt}$$

et, pour la bobine :

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Ainsi :

$$\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + LC \frac{d^2i}{dt^2} + i = 0.$$

En divisant par LC :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Or :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

et :

$$\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}.$$

Donc :

$$i'' + \frac{\omega_0}{Q} i' + \omega_0^2 i = 0.$$

2. Expression de $i(t)$ suivant les différents régimes

On pose :

$$\lambda = \frac{1}{2Q}.$$

L'équation devient :

$$i'' + 2\lambda\omega_0 i' + \omega_0^2 i = 0$$

Les conditions initiales sont :

$$i(0) = i_0$$

et :

$$u(0) = 0.$$

Or :

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Donc :

$$i'(0) = 0.$$

a) Cas $\lambda = 1$: régime critique

L'équation caractéristique possède une racine double :

$$r = -\omega_0.$$

La solution est :

$$i(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Avec les conditions initiales, on obtient :

$$i(t) = i_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}.$$

b) Cas $\lambda > 1$: régime apériodique

Posons :

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

Les deux racines sont :

$$r_{1,2} = -\lambda\omega_0 \pm \omega_0\mu.$$

La solution vérifiant les conditions initiales est :

$$i(t) = i_0 e^{-\lambda\omega_0 t} \left[\cosh(\mu\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\mu} \sinh(\mu\omega_0 t) \right].$$

c) Cas $\lambda < 1$: régime pseudo-périodique

Posons :

$$\nu = \sqrt{1 - \lambda^2}.$$

La pseudo-pulsation est :

$$\omega = \omega_0\nu.$$

La solution est :

$$i(t) = i_0 e^{-\lambda\omega_0 t} \left[\cos(\nu\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\nu} \sin(\nu\omega_0 t) \right].$$

Exercice 4 : Régime transitoire apériodique

On note :

$$u = V_A - V_B.$$

Le courant dans le condensateur vertical vaut :

$$i_1 = C \frac{du}{dt}.$$

1. Équation différentielle vérifiée par i_1

L'étude du circuit et l'application des lois de Kirchhoff conduisent à :

$$R^2 C^2 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 3RC \frac{di_1}{dt} + i_1 = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$R^2 C^2 r^2 + 3RCr + 1 = 0.$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = 9R^2 C^2 - 4R^2 C^2 = 5R^2 C^2.$$

Les racines sont donc :

$$r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2RC}.$$

2. Conditions initiales

À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés.

La tension d'un condensateur étant continue :

$$u(0^+) = 0.$$

Juste après la fermeture, on obtient :

$$i_1(0^+) = \frac{E}{R}$$

et :

$$\frac{di_1}{dt}(0^+) = -\frac{2E}{R^2 C}.$$

3. Expression de $i_1(t)$

La solution générale est :

$$i_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}.$$

Avec :

$$r_1 = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2RC}$$

et :

$$r_2 = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2RC}.$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$i_1(t) = \frac{E}{2R\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5} - 1)e^{-\frac{(3-\sqrt{5})t}{2RC}} + (\sqrt{5} + 1)e^{-\frac{(3+\sqrt{5})t}{2RC}} \right]$$

On vérifie que :

$$i_1(0) = \frac{E}{R}.$$

Exercice 5 : Détecteur de crête

On considère une diode idéale et un condensateur de capacité :

$$C = 1 \mu\text{F}.$$

(a) **Signal de sortie $s(t)$**

Lorsque :

$$e(t) > s(t),$$

la diode devient passante et le condensateur se charge.

On a alors :

$$s(t) = e(t).$$

Lorsque :

$$e(t) < s(t),$$

la diode est bloquée.

Dans le montage idéal, le condensateur ne possède aucun chemin de décharge. Il conserve donc la plus grande tension atteinte.

Ainsi :

$$s(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} e(\tau)$$

Le signal de sortie est donc constitué de paliers correspondant aux maxima successifs du signal d'entrée.

(a) **Signal de sortie $s(t)$**

La diode est supposée idéale.

Lorsque la tension d'entrée devient supérieure à la tension du condensateur :

$$e(t) > s(t),$$

la diode devient passante et le condensateur se charge. On a alors :

$$s(t) = e(t).$$

Lorsque :

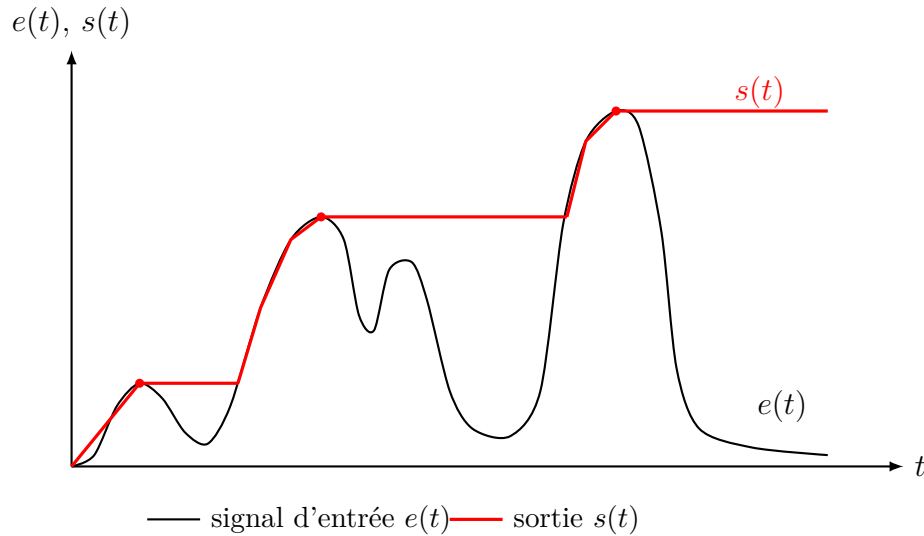
$$e(t) < s(t),$$

la diode est bloquée. Comme le condensateur ne possède aucun chemin de décharge, sa tension reste constante.

Ainsi :

$$s(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} e(\tau)$$

Le signal $s(t)$ correspond donc à l'enveloppe des maxima successifs du signal $e(t)$.



On constate que $s(t)$:

- suit $e(t)$ lorsque $e(t)$ atteint un nouveau maximum ;
- reste constante lorsque $e(t)$ diminue ;
- augmente de nouveau lorsqu'un maximum plus élevé apparaît.

Le condensateur mémorise donc la plus grande valeur atteinte par le signal d'entrée.

(b) **Influence de la résistance R**

Avec la résistance R , lorsque la diode est bloquée, le condensateur se décharge dans R .

La tension vérifie alors :

$$RC \frac{ds}{dt} + s = 0.$$

La solution est :

$$s(t) = s(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

La constante de temps est :

$$\tau = RC.$$

Si :

$$RC \gg T,$$

le condensateur se décharge très lentement entre deux maxima.

Le circuit se comporte alors comme un bon détecteur de crête.

À l'inverse, si R est faible, le condensateur se décharge rapidement et le signal de sortie suit davantage les variations du signal d'entrée.

(c) **Application à une tension sinusoïdale de 500 Hz**

La fréquence du signal est :

$$f = 500 \text{ Hz.}$$

Sa période vaut :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500}.$$

Donc :

$$T = 2 \text{ ms}$$

Pour obtenir un bon détecteur de crête, il faut :

$$RC \gg T.$$

Ainsi :

$$RC \gg 2 \times 10^{-3}.$$

Avec :

$$C = 1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F},$$

on obtient :

$$R \gg \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-6}}.$$

Donc :

$$R \gg 2 \text{ k}\Omega$$

On peut prendre par exemple :

$$R = 100 \text{ k}\Omega$$

pour lequel :

$$RC = 0,10 \text{ s}.$$

On a bien :

$$0,10 \text{ s} \gg 2 \text{ ms}.$$

Pour une tension sinusoïdale :

$$e(t) = E_m \sin(\omega t),$$

la valeur efficace est :

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Le détecteur de crête fournit approximativement :

$$s \simeq E_m.$$

Pour obtenir directement la valeur efficace, on peut placer à la sortie un pont diviseur de tension. Si les résistances du pont sont R_1 et R_2 , on impose :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc :

$$\sqrt{2}R_2 = R_1 + R_2.$$

Ainsi :

$$R_1 = (\sqrt{2} - 1)R_2.$$

Exercice 6 : Transfert de charge entre deux condensateurs

Le condensateur de capacité C est initialement chargé sous une tension E .

Le condensateur C' est initialement déchargé.

On note :

$$u(0) = E$$

et :

$$u'(0) = 0.$$

(a) **Variations du courant $i(t)$**

La charge totale des deux condensateurs est conservée :

$$Cu + C'u' = CE.$$

Le courant vérifie :

$$i = -C \frac{du}{dt}$$

et :

$$i = C' \frac{du'}{dt}.$$

La loi d'Ohm dans la résistance donne :

$$u - u' = Ri.$$

Posons :

$$d(t) = u(t) - u'(t).$$

On obtient :

$$\frac{dd}{dt} = -\left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{RC'}\right)d.$$

Donc :

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{C + C'}{RC C'} d.$$

Comme :

$$d(0) = E,$$

on obtient :

$$d(t) = E e^{-\frac{C+C'}{RC C'} t}$$

La constante de temps vaut :

$$\tau = R \frac{CC'}{C + C'}$$

Comme :

$$i = \frac{u - u'}{R} = \frac{d}{R},$$

le courant est :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{C+C'}{RC C'} t}$$

ou encore :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Le courant décroît donc exponentiellement depuis :

$$i(0^+) = \frac{E}{R}$$

jusqu'à :

$$i(\infty) = 0.$$

(b) Variation d'énergie du système

À l'état final, le courant est nul et les deux condensateurs possèdent la même tension V_f .

La conservation de la charge donne :

$$CE = (C + C')V_f.$$

Donc :

$$V_f = \frac{C}{C + C'} E$$

L'énergie initiale est :

$$W_i = \frac{1}{2}CE^2.$$

L'énergie finale est :

$$W_f = \frac{1}{2}CV_f^2 + \frac{1}{2}C'V_f^2.$$

Ainsi :

$$W_f = \frac{1}{2}(C + C')V_f^2.$$

En remplaçant V_f :

$$W_f = \frac{1}{2} \frac{C^2}{C + C'} E^2.$$

La variation d'énergie est :

$$\Delta E = W_f - W_i.$$

Donc :

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2$$

et :

$$|\Delta E| = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2.$$

(c) **Énergie dissipée par effet Joule**

L'énergie dissipée dans la résistance vaut :

$$E_J = \int_0^{+\infty} Ri^2(t) dt.$$

Or :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Donc :

$$E_J = \frac{E^2}{R} \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt.$$

Or :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\tau}{2}.$$

Ainsi :

$$E_J = \frac{E^2 \tau}{2R}.$$

Avec :

$$\tau = R \frac{CC'}{C + C'},$$

on obtient :

$$E_J = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2$$

Ainsi :

$$E_J = |\Delta E|.$$

L'énergie perdue par les condensateurs est entièrement dissipée par effet Joule dans la résistance.

(d) **Cas où $R \rightarrow 0$**

On remarque que :

$$E_J = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2$$

est indépendante de R .

En revanche :

$$\tau = R \frac{CC'}{C + C'} \rightarrow 0$$

lorsque :

$$R \rightarrow 0.$$

De plus :

$$i(0^+) = \frac{E}{R} \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, lorsque R devient très faible, le transfert de charge s'effectue pendant un temps de plus en plus court avec un courant de plus en plus intense.

Le cas idéal :

$$R = 0$$

constitue une singularité du modèle.

Dans un circuit réel, les résistances parasites, les inductances des conducteurs et les autres pertes empêchent l'apparition d'un courant réellement infini.