Electronique

1 Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé

1.1 Régime sinusoïdal

On considère un circuit linéaire soumis à une tension d'entrée sinusoïdale :

$$\boxed{e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)}$$

où :
- E_m est l'amplitude de la tension d'entrée ;
- ω est la pulsation, exprimée en rad.s^{-1} ;
- φ_e est la phase à l'origine.

La fréquence f et la pulsation ω sont reliées par :

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

où f est exprimée en hertz (Hz).

Remarque : Une fonction sinusoïdale est une fonction qui possède **une seule fréquence**.

1.2 Réponse d'un circuit linéaire

En régime sinusoïdal forcé, si l'entrée d'un circuit linéaire est sinusoïdale de pulsation ω, alors la sortie est également sinusoïdale de même pulsation :

$$\boxed{s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)}$$

Le circuit ne modifie donc pas la fréquence du signal sinusoïdal. En revanche, il peut modifier :
- son amplitude ;
- sa phase.

Ainsi :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

devient à la sortie :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$$

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est :

$$\boxed{\varphi = \varphi_s - \varphi_e}$$

Remarque : Un circuit est linéaire si il ne contient pas des composants non linéaire comme la diode, l'ampli.opérationnel en régime de saturation... .

2 Représentation complexe

Pour simplifier l'étude des circuits en régime sinusoïdal, on utilise la représentation complexe.
À la tension :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

on associe l'amplitude complexe :

$$\boxed{\underline{E} = E_m e^{j\varphi_e}}$$

De même, à :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$$

on associe :

$$\boxed{\underline{S} = S_m e^{j\varphi_s}}$$

Dans cette représentation, la dérivation par rapport au temps correspond à une multiplication par $j\omega$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad j\omega}$$

et l'intégration correspond à une division par $j\omega$:

$$\boxed{\int dt \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{j\omega}}$$

3 Impédances complexes

En régime sinusoïdal forcé, la relation entre la tension et le courant aux bornes d'un dipôle s'écrit :

$$\boxed{\underline{U} = Z\,\underline{I}}$$

où Z représente l'impédance complexe du dipôle.
Pour les dipôles usuels :

Dipôle	**Impédance complexe**
Résistance	$Z_R = R$
Condensateur	$Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$
Bobine	$Z_L = jL\omega$

On peut alors appliquer les lois habituelles de l'électrocinétique en utilisant les impédances complexes :

— loi des nœuds ;

— loi des mailles ;
— diviseur de tension ;
— diviseur de courant.

4 Notion de filtre

On considère un circuit possédant une tension d'entrée $e(t)$ et une tension de sortie $s(t)$. Pour une entrée sinusoïdale, le circuit peut :
— transmettre le signal ;
— atténuer ou amplifier le signal ;
— modifier sa phase.
La réponse du circuit dépend généralement de la fréquence du signal d'entrée.(Le circuit ne modifie pas la fréquence)

Définition :
Un **filtre** est un circuit linéaire dont la réponse dépend de la fréquence du signal d'entrée.

5 Fonction de transfert

Pour une entrée et une sortie sinusoïdales de même pulsation ω, on définit la fonction de transfert complexe par :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}}$$

avec :

$$\underline{E} = E_m e^{j\varphi_e}$$

et :

$$\underline{S} = S_m e^{j\varphi_s}$$

On obtient alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{S_m}{E_m} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$$

La fonction de transfert peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}}$$

où :

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m}}$$

représente le gain en amplitude, et :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg\left(H(j\omega)\right) = \varphi_s - \varphi_e}$$

représente le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

6 Gain et déphasage d'un filtre

La fonction de transfert complexe d'un filtre s'écrit :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

où :
- $|H(j\omega)|$ représente le gain en amplitude ;
- $\varphi(\omega)$ représente le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

6.1 Gain en amplitude

Le gain en amplitude du filtre est défini par :

$$\boxed{G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m}}$$

où E_m et S_m représentent respectivement les amplitudes des signaux d'entrée et de sortie. On distingue trois situations :

$G > 1$: le signal est amplifié,

$G = 1$: le signal est transmis sans modification d'amplitude,

$G < 1$: le signal est atténué.

6.2 Gain en décibels

Pour étudier le comportement d'un filtre sur une large gamme de fréquences, on introduit le gain en décibels :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log_{10}|H(j\omega)|}$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{S_m}{E_m}\right)}$$

Quelques valeurs importantes sont données dans le tableau suivant :

Gain $\lvert H\rvert$	**Gain en décibels**
10	20 dB
1	0 dB
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	≈ -3 dB
$\frac{1}{10}$	-20 dB

6.3 Déphasage

Le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est donné par :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg\left[H(j\omega)\right]}$$

On a également :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e}$$

Si :

$$\varphi > 0,$$

la sortie est en avance de phase sur l'entrée.
Si :

$$\varphi < 0,$$

la sortie est en retard de phase sur l'entrée.

7 Diagrammes de Bode

Le comportement fréquentiel d'un filtre est généralement représenté à l'aide des **diagrammes de Bode**.
Ils sont constitués de deux représentations :

1. le diagramme de gain ;
2. le diagramme de phase.

L'axe horizontal représente la pulsation ω ou la fréquence f sur une échelle logarithmique.

7.1 Diagramme de gain

Le diagramme de gain représente :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left|H(j\omega)\right|}$$

en fonction de $\log(\omega)$.
L'utilisation d'une échelle logarithmique permet de représenter sur un même graphique une très large gamme de fréquences.

7.2 Décade

On appelle **décade** un intervalle de fréquences pour lequel la fréquence est multipliée par 10.
Par exemple :

$$10\,\text{Hz} \longrightarrow 100\,\text{Hz}$$

représente une décade.
De même :

$$100\,\text{Hz} \longrightarrow 1000\,\text{Hz}$$

représente également une décade.
Une pente de :

$$\boxed{-20\,\text{dB/décade}}$$

signifie donc que le gain diminue de 20 dB lorsque la fréquence est multipliée par 10.

7.3 Diagramme de phase

Le diagramme de phase représente :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)}$$

en fonction de $\log(\omega)$.
La phase est généralement exprimée en degrés ou en radians.

8 Bande passante

La **bande passante** d'un filtre est l'ensemble des fréquences pour lesquelles le signal est suffisamment transmis.
On définit généralement la bande passante à $-3\,\text{dB}$.
Si $G_{\text{dB,max}}$ désigne le gain maximal du filtre, la bande passante correspond aux fréquences vérifiant :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3\,\text{dB}}$$

En utilisant le gain en amplitude, cette condition devient :

$$\boxed{|H(j\omega)| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}}$$

9 Fréquence de coupure

Une **fréquence de coupure** est une fréquence située à la limite de la bande passante.
À la fréquence de coupure f_c, le gain en amplitude vérifie :

$$\boxed{|H(j\omega_c)| = \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}}$$

où :

$$\boxed{\omega_c = 2\pi f_c}$$

En décibels :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB,max}} - 3\,\text{dB}}$$

Dans le cas particulier où :

$$|H|_{\max} = 1,$$

on obtient :

$$\boxed{|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) = -3\,\text{dB}}$$

10 Classification des filtres

Selon les fréquences qu'ils transmettent ou atténuent leurs amplitudes, on distingue principalement quatre types de filtres.

10.1 Filtre passe-bas

Un filtre **passe-bas** transmet les basses fréquences et atténue l'amplitude des hautes fréquences.
Idéalement :

$$\boxed{\begin{cases} f < f_c & : \text{fréquences transmises,} \\ f > f_c & : \text{fréquences atténuées.} \end{cases}}$$

10.2 Filtre passe-haut

Un filtre **passe-haut** atténue les amplitudes des basses fréquences et transmet les amplitudes des hautes fréquences.
Idéalement :

$$\boxed{\begin{cases} f < f_c & : \text{fréquences atténuées,} \\ f > f_c & : \text{fréquences transmises.} \end{cases}}$$

10.3 Filtre passe-bande

Un filtre **passe-bande** transmet principalement les fréquences comprises entre deux fréquences de coupure f_{c1} et f_{c2} :

$$\boxed{f_{c1} < f < f_{c2}}$$

Sa largeur de bande est :

$$\boxed{\Delta f = f_{c2} - f_{c1}}$$

10.4 Filtre coupe-bande

Un filtre **coupe-bande**, appelé également filtre réjecteur, atténue principalementl'amplitude des fréquences comprises entre deux fréquences de coupure :

$$\boxed{f_{c1} < f < f_{c2}}$$

et transmet les fréquences situées à l'extérieur de cet intervalle.

11 Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre est déterminé par le degré du polynôme en $j\omega$ présent au dénominateur de sa fonction de transfert.
Par exemple, une fonction de transfert de la forme :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

correspond à un **filtre du premier ordre**.
Une fonction de transfert contenant un terme en $(j\omega)^2$ au dénominateur correspond généralement à un filtre du deuxième ordre.
Pour un filtre du premier ordre, la pente asymptotique associée à un pôle est :

$$\boxed{-20\,\text{dB/décade}}$$

tandis que celle associée à un zéro est :

$$\boxed{+20\,\text{dB/décade}}$$

12 Filtre passe-bas du premier ordre

12.1 Étude qualitative

Considérons un circuit constitué d'une résistance R et d'un condensateur C montés en série. La tension de sortie $s(t)$ est prise aux bornes du condensateur.
Avant d'effectuer les calculs, on peut prévoir qualitativement le comportement du circuit.

À basse fréquence

L'impédance du condensateur est :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on a :

$$|Z_C| \longrightarrow +\infty.$$

Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert. La tension de sortie est pratiquement égale à la tension d'entrée :

$$\boxed{s(t) \simeq e(t)}$$

Le circuit transmet donc les basses fréquences.

À haute fréquence

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on a :

$$|Z_C| \longrightarrow 0.$$

Le condensateur se comporte alors comme un court-circuit.
La tension à ses bornes tend vers zéro :

$$\boxed{s(t) \simeq 0}$$

Le circuit atténue donc les hautes fréquences.
On prévoit ainsi que le circuit est un :

$$\boxed{\text{filtre passe-bas}}$$

12.2 Fonction de transfert

Les impédances de la résistance et du condensateur sont :

$$Z_R = R$$

et :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

En appliquant la relation du diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}\underline{E}$$

d'où :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}.$$

Ainsi :

$$H(j\omega) = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jC\omega$, on obtient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

On introduit la pulsation de coupure :

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

La fonction de transfert prend alors la forme canonique :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

La fréquence de coupure est donc :

$$\boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}}$$

12.3 Gain en amplitude

Le gain en amplitude est :

$$G(\omega) = |H(j\omega)|.$$

À partir de :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}},$$

on obtient :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}$$

12.4 Gain en décibels

Le gain en décibels est défini par :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|.$$

Ainsi :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right].$$

On obtient finalement :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \right]}$$

12.5 Étude asymptotique du gain

Basses fréquences : $\omega \ll \omega_c$

Si :

$$\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1,$$

alors :

$$H(j\omega) \simeq 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{|H| \simeq 1}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}.$$

Le diagramme asymptotique est donc horizontal.

Hautes fréquences : $\omega \gg \omega_c$

Si :

$$\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1,$$

alors :

$$H(j\omega) \simeq \frac{1}{j\dfrac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{j\omega}.$$

Ainsi :

$$|H| \simeq \frac{\omega_c}{\omega}.$$

Le gain en décibels devient :

$$G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right).$$

Donc :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Lorsque la pulsation est multipliée par 10, le gain diminue de 20 dB.
La pente de l'asymptote est donc :

$$\boxed{-20\,\text{dB/décade}}$$

12.6 Étude à la pulsation de coupure

Pour :

$$\omega = \omega_c,$$

le gain vaut :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

soit :

$$\boxed{|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Le gain en décibels vaut alors :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) \simeq -3\,\text{dB}}$$

La fréquence f_c est donc bien la fréquence de coupure à $-3\,\text{dB}$.

12.7 Déphasage

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}.$$

Son argument vaut :

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Étudions les trois cas caractéristiques.

Basses fréquences

Pour :

$$\omega \ll \omega_c,$$

on a :

$$\boxed{\varphi \simeq 0}$$

La sortie est pratiquement en phase avec l'entrée.

À la pulsation de coupure

Pour :

$$\omega = \omega_c,$$

on obtient :

$$\varphi = -\arctan(1)$$

donc :

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ}$$

Hautes fréquences

Pour :

$$\omega \gg \omega_c,$$

on obtient :

$$\boxed{\varphi \simeq -\frac{\pi}{2} = -90^\circ}$$

12.8 Bilan

Les résultats essentiels du filtre passe-bas du premier ordre sont regroupés dans le tableau suivant :

	$\omega \ll \omega_c$	$\omega = \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$\lvert H \rvert$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\omega_c}{\omega}$
G_{dB}	0	$-3\,\text{dB}$	$-20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$
φ	0°	-45°	-90°

On retient donc :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \omega \ll \omega_c & \Rightarrow & \text{signal transmis} \\ \omega = \omega_c & \Rightarrow & G_{\text{dB}} = -3\,\text{dB} \\ \omega \gg \omega_c & \Rightarrow & \text{signal fortement atténué} \end{array}}$$

Le circuit RC avec la sortie aux bornes du condensateur constitue donc un **filtre passe-bas du premier ordre**.

12.9 Diagramme de Bode du filtre passe-bas

La fonction de transfert du filtre passe-bas du premier ordre est :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

Le gain en décibels est :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = -10\log_{10}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]}$$

et la phase est :

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Diagramme asymptotique du gain

Pour les basses fréquences :

$$\omega \ll \omega_c$$

on a :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}$$

L'asymptote est donc une droite horizontale.
Pour les hautes fréquences :

$$\omega \gg \omega_c$$

on obtient :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Cette asymptote possède une pente :

$$\boxed{-20\,\text{dB/décade}}$$

À la pulsation de coupure :

$$\boxed{\omega = \omega_c}$$

le gain réel vaut :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) = -3\,\text{dB}}$$

La courbe réelle passe donc 3 dB sous l'intersection des deux asymptotes.

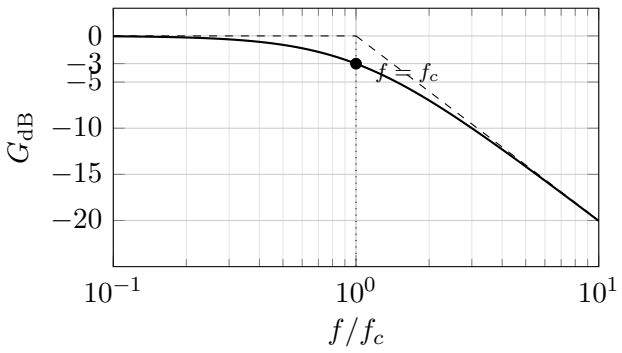
Diagramme de phase

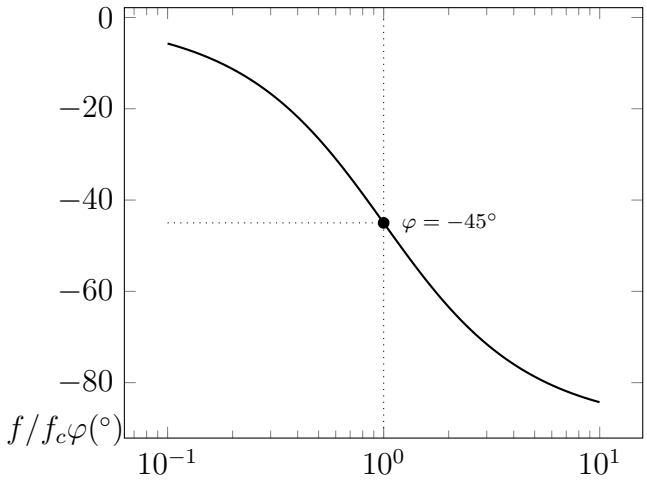
La phase est donnée par :

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

On retient :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \omega \ll \omega_c & \Rightarrow & \varphi \simeq 0° \\ \omega = \omega_c & \Rightarrow & \varphi = -45° \\ \omega \gg \omega_c & \Rightarrow & \varphi \simeq -90° \end{array}}$$





13 Filtre passe-haut du premier ordre

13.1 Étude qualitative

Considérons un circuit constitué d'un condensateur C et d'une résistance R montés en série.
La tension de sortie $s(t)$ est prise aux bornes de la résistance.
L'impédance du condensateur est :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

À basse fréquence

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on a :

$$|Z_C| \longrightarrow +\infty.$$

Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert.
Le courant dans le circuit tend vers zéro et la tension aux bornes de la résistance tend également vers zéro :

$$\boxed{s(t) \simeq 0}$$

Les basses fréquences sont donc fortement atténuées.

À haute fréquence

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on a :

$$|Z_C| \longrightarrow 0.$$

Le condensateur se comporte alors comme un court-circuit.
La tension de sortie devient pratiquement égale à la tension d'entrée :

$$\boxed{s(t) \simeq e(t)}$$

Les hautes fréquences sont donc transmises.
On prévoit que le circuit réalise un :

$$\boxed{\text{filtre passe-haut}}$$

13.2 Fonction de transfert

La sortie étant prise aux bornes de la résistance, le diviseur de tension donne :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} \underline{E}$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jC\omega$, on obtient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

On pose :

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

La fonction de transfert prend alors la forme canonique :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}}$$

avec :

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\pi RC}}$$

13.3 Gain en amplitude

Le gain en amplitude est :

$$G(\omega) = |H(j\omega)|$$

soit :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}}$$

13.4 Gain en décibels

Le gain en décibels vaut :

$$G_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left[\frac{\dfrac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right]$$

soit :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - 10\log_{10}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]}$$

13.5 Étude asymptotique du gain

Basses fréquences : $\omega \ll \omega_c$

Dans ce domaine :

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \simeq 1$$

donc :

$$H(j\omega) \simeq j\frac{\omega}{\omega_c}$$

et :

$$\boxed{|H| \simeq \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Le gain en décibels devient :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

L'asymptote possède donc une pente :

$$\boxed{+20\,\text{dB/décade}}$$

Hautes fréquences : $\omega \gg \omega_c$

Dans ce domaine :

$$H(j\omega) \simeq \frac{j\omega/\omega_c}{j\omega/\omega_c}$$

donc :

$$\boxed{H(j\omega) \simeq 1}$$

Ainsi :

$$\boxed{|H| \simeq 1}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}$$

L'asymptote est donc horizontale.

13.6 Étude à la pulsation de coupure

Pour :

$$\omega = \omega_c,$$

on obtient :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc :

$$\boxed{|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) = -3\,\text{dB}}$$

13.7 Déphasage

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

La phase est donc :

$$\varphi = \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

Pour $\omega > 0$:

$$\arg(j\omega/\omega_c) = \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$\boxed{\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$

Basses fréquences

Pour :

$$\omega \ll \omega_c,$$

on obtient :

$$\boxed{\varphi \simeq +90^\circ}$$

À la pulsation de coupure

Pour :

$$\omega = \omega_c,$$

on obtient :

$$\boxed{\varphi = +45^\circ}$$

Hautes fréquences

Pour :

$$\omega \gg \omega_c,$$

on obtient :

$$\boxed{\varphi \simeq 0^\circ}$$

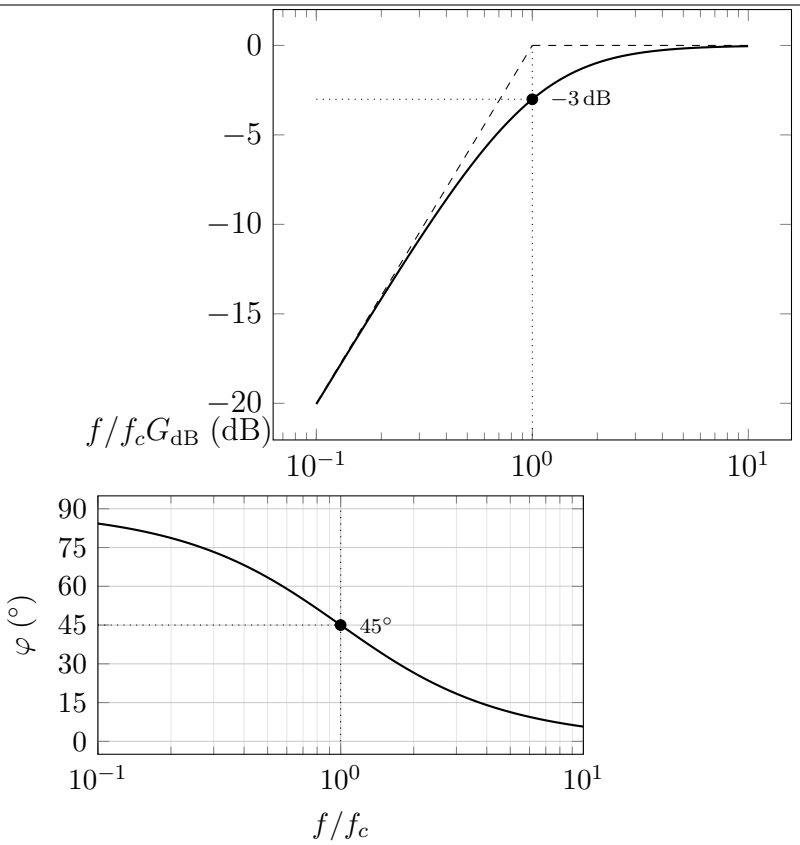
13.8 Bilan du filtre passe-haut

	$\omega \ll \omega_c$	$\omega = \omega_c$	$\omega \gg \omega_c$
$\lvert H \rvert$	$\dfrac{\omega}{\omega_c}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	1
G_{dB}	$20 \log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)$	$-3\,\text{dB}$	$0\,\text{dB}$
φ	$+90^\circ$	$+45^\circ$	0°

On retient :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \omega \ll \omega_c & \Rightarrow & \text{forte atténuation} \\ \omega = \omega_c & \Rightarrow & G_{\text{dB}} = -3\,\text{dB} \\ \omega \gg \omega_c & \Rightarrow & \text{signal transmis} \end{array}}$$

Le circuit RC avec la sortie prise aux bornes de la résistance constitue donc un **filtre passe-haut du premier ordre**.



14 Filtres du deuxième ordre

14.1 Définition

Un filtre est dit du **deuxième ordre** lorsque le dénominateur de sa fonction de transfert est un polynôme du deuxième degré en $j\omega$.
Une forme canonique couramment utilisée est :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{1 + \dfrac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Comme :

$$(j\omega)^2 = -\omega^2,$$

le dénominateur peut également s'écrire :

$$\boxed{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

où :

- ω_0 est la pulsation propre du filtre ;
- Q est le facteur de qualité ;
- $N(j\omega)$ dépend de la nature du filtre.

La fréquence propre correspondante est :

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}$$

14.2 Rôle du facteur de qualité

Le facteur de qualité Q est un nombre sans dimension qui caractérise notamment la sélectivité et l'éventuelle résonance du filtre.
Plus Q est élevé, plus le comportement du filtre au voisinage de sa pulsation propre peut être marqué.
Dans le cas d'un filtre passe-bande, le facteur de qualité est relié à la largeur de la bande passante par :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

avec :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}}$$

On peut également écrire :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

avec :

$$\Delta f = f_{c2} - f_{c1}.$$

15 Filtre passe-bas du deuxième ordre

15.1 Forme canonique

La fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bas du deuxième ordre est :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

où H_0 représente le gain statique du filtre.
En introduisant la pulsation réduite :

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

la fonction de transfert devient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

15.2 Gain en amplitude

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\left|1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right|}$$

Or :

$$\left|1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right| = \sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

On obtient donc :

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$$

soit :

$$\boxed{|H(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

15.3 Gain en décibels

Le gain en décibels est :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|}$$

On obtient :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right]}$$

15.4 Étude aux basses fréquences

Pour :

$$\omega \ll \omega_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \ll 1,$$

on peut écrire :

$$1 - x^2 \simeq 1$$

et :

$$\frac{x}{Q} \simeq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{H(j\omega) \simeq H_0}$$

donc :

$$\boxed{|H| \simeq H_0}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20 \log_{10}(H_0)}$$

Si $H_0 = 1$:

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}$$

Les basses fréquences sont donc transmises.

15.5 Étude aux hautes fréquences

Pour :

$$\omega \gg \omega_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \gg 1,$$

le terme dominant du dénominateur est $-x^2$.
On obtient :

$$H(j\omega) \simeq -\frac{H_0}{x^2}$$

soit :

$$\boxed{H(j\omega) \simeq -H_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Le module vaut donc :

$$\boxed{|H| \simeq H_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

Le gain en décibels devient :

$$G_{\text{dB}} \simeq 20 \log_{10}(H_0) - 40 \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

La pente asymptotique est donc :

$$\boxed{-40\,\text{dB/décade}}$$

C'est une caractéristique importante d'un filtre passe-bas du deuxième ordre.

15.6 Étude à la pulsation propre

Pour :

$$\omega = \omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1,$$

la fonction de transfert devient :

$$H(j\omega_0) = \frac{H_0}{j/Q}$$

soit :

$$H(j\omega_0) = -jQH_0.$$

Par conséquent :

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = QH_0}$$

et :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}}$$

soit :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = -90^\circ}$$

Attention : ω_0 est la pulsation propre du filtre. Elle ne correspond pas nécessairement à une pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$.

15.7 Déphasage

La phase de la fonction de transfert est donnée par l'opposé de l'argument du dénominateur.
Aux basses fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq 0^\circ}$$

À la pulsation propre :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = -90^\circ}$$

Aux hautes fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq -180^\circ}$$

On retient donc :

$$\boxed{0^\circ \quad \longrightarrow \quad -90^\circ \quad \longrightarrow \quad -180^\circ}$$

lorsque la fréquence augmente.

15.8 Phénomène de résonance

Contrairement au filtre passe-bas du premier ordre, un filtre du deuxième ordre peut présenter une **résonance**.
On cherche alors l'existence d'un maximum du gain :

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}.$$

Le gain présente un maximum pour une pulsation non nulle si :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Dans ce cas, la pulsation de résonance est :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

On remarque que :

$$\boxed{\omega_r < \omega_0}$$

La résonance devient de plus en plus marquée lorsque le facteur de qualité Q augmente.

15.9 Bilan

Pour un filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \omega \ll \omega_0 & \Rightarrow & |H| \simeq H_0 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow & |H| = QH_0 \\ \omega \gg \omega_0 & \Rightarrow & |H| \simeq H_0 \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \end{array}}$$

La pente à haute fréquence vaut :

$$\boxed{-40\,\text{dB/décade}}$$

et une résonance existe si :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

16 Application : circuit RLC série

On considère un circuit constitué d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur C montés en série.
Les impédances complexes des trois dipôles sont :

$$Z_R = R, \qquad Z_L = jL\omega, \qquad Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

L'impédance totale du circuit est donc :

$$\boxed{Z = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

soit :

$$\boxed{Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Selon le dipôle aux bornes duquel on prélève la tension de sortie, le circuit réalise différents types de filtres.

Sortie	Nature du filtre
u_C	Passe-bas
u_R	Passe-bande
u_L	Passe-haut

17 RLC série : sortie aux bornes du condensateur

La tension de sortie est prise aux bornes du condensateur :

$$s(t) = u_C(t).$$

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U_C}}{\underline{E}}.$$

En utilisant le diviseur de tension :

$$H(j\omega) = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C}.$$

Ainsi :

$$H(j\omega) = \frac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jC\omega$, on obtient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

17.1 Mise sous forme canonique

La forme canonique d'un passe-bas du deuxième ordre est :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}.$$

Par identification :

$$LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

D'autre part :

$$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

Ainsi :

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0}.$$

D'où :

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0}.$$

En utilisant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

on obtient :

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

La fonction de transfert devient finalement :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

avec :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

17.2 Nature du filtre

Étudions le comportement du filtre aux fréquences extrêmes.

Basses fréquences

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on obtient :

$$H(j\omega) \longrightarrow 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{s(t) \simeq e(t)}$$

Les basses fréquences sont transmises.

Hautes fréquences

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on a :

$$H(j\omega) \simeq -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{|H| \longrightarrow 0}$$

Les hautes fréquences sont atténuées.
Le circuit réalise donc un :

$$\boxed{\text{filtre passe-bas du deuxième ordre}}$$

La pente asymptotique à haute fréquence est :

$$\boxed{-40\,\text{dB/décade}}$$

18 RLC série : sortie aux bornes de la résistance

Prenons maintenant la tension de sortie aux bornes de la résistance :

$$s(t) = u_R(t).$$

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U_R}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jC\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}.$$

En utilisant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et :

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

on obtient :

$$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

La fonction de transfert prend donc la forme canonique :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

18.1 Nature du filtre

Pour :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on a :

$$\boxed{H(j\omega) \longrightarrow 0}$$

Les très basses fréquences sont donc atténuées.
Pour :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on obtient également :

$$\boxed{H(j\omega) \longrightarrow 0}$$

Les très hautes fréquences sont également atténuées.
En revanche, pour :

$$\omega = \omega_0,$$

le terme réel du dénominateur s'annule :

$$1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0.$$

Ainsi :

$$H(j\omega_0) = \frac{j/Q}{j/Q}$$

donc :

$$\boxed{H(j\omega_0) = 1}$$

et :

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = 1}$$

Le circuit transmet donc au maximum les fréquences situées autour de ω_0.
Il constitue un :

$$\boxed{\text{filtre passe-bande du deuxième ordre}}$$

18.2 Gain du filtre passe-bande

En posant :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

la fonction de transfert devient :

$$H(j\omega) = \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}.$$

Son module vaut :

$$\boxed{|H| = \frac{\dfrac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}}$$

À la pulsation propre :

$$x = 1,$$

donc :

$$\boxed{|H|_{\max} = 1}$$

18.3 Fréquences de coupure

Les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} sont définies par :

$$|H| = \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Comme :

$$|H|_{\max} = 1,$$

on a :

$$\boxed{|H(\omega_{c1})| = |H(\omega_{c2})| = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Elles délimitent la bande passante :

$$\boxed{\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}}$$

La largeur de la bande passante est :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}}$$

Pour le circuit RLC série :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{R}{L}}$$

Or :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

On retrouve :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

18.4 Sélectivité

Le facteur de qualité caractérise la sélectivité du filtre passe-bande :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

Si Q est grand, alors :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

est faible.
Le filtre sélectionne alors une bande étroite de fréquences autour de ω_0.
On dit que le filtre est **sélectif**.

$$\boxed{Q \text{ grand} \quad \Longrightarrow \quad \text{filtre très sélectif}}$$

Inversement :

$$\boxed{Q \text{ faible} \quad \Longrightarrow \quad \text{bande passante large}}$$

19 RLC série : filtre passe-haut du deuxième ordre

On considère le circuit RLC série et on prend cette fois la tension de sortie aux bornes de la bobine :

$$\boxed{s(t) = u_L(t)}$$

La fonction de transfert est définie par :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U_L}}{\underline{E}}.$$

Les impédances sont :

$$Z_R = R, \qquad Z_L = jL\omega, \qquad Z_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

En appliquant le diviseur de tension :

$$H(j\omega) = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L + Z_C}.$$

Ainsi :

$$H(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jC\omega$, on obtient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

19.1 Mise sous forme canonique

On rappelle que :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

On a donc :

$$LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

et :

$$RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0}.$$

La fonction de transfert devient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

En posant :

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

on obtient la forme simplifiée :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}}$$

19.2 Nature du filtre

Étudions le comportement du filtre aux basses et aux hautes fréquences.

Basses fréquences

Pour :

$$\omega \ll \omega_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \ll 1,$$

le dénominateur est approximativement égal à 1.
Ainsi :

$$H(j\omega) \simeq -x^2.$$

Donc :

$$\boxed{|H| \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on obtient :

$$\boxed{|H| \longrightarrow 0}$$

Les basses fréquences sont donc fortement atténuées.

Hautes fréquences

Pour :

$$\omega \gg \omega_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \gg 1,$$

les termes en x^2 dominent.
Ainsi :

$$H(j\omega) \simeq \frac{-x^2}{-x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{H(j\omega) \simeq 1}$$

et :

$$\boxed{|H| \simeq 1}$$

Les hautes fréquences sont donc transmises.
Le circuit réalise ainsi un :

$$\boxed{\text{filtre passe-haut du deuxième ordre}}$$

19.3 Gain en amplitude

À partir de :

$$H(j\omega) = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}},$$

on obtient :

$$\boxed{|H| = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}}$$

soit :

$$\boxed{|H| = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \dfrac{1}{Q^2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

19.4 Gain en décibels

Le gain en décibels est :

$$G_{\text{dB}} = 20\log_{10}|H|.$$

On obtient :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 40\log_{10}(x) - 10\log_{10}\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right]}$$

19.5 Étude asymptotique du gain

Basses fréquences

Pour :

$$x \ll 1,$$

on a :

$$|H| \simeq x^2.$$

Donc :

$$G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(x^2).$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

La pente asymptotique est donc :

$$\boxed{+40\,\text{dB/décade}}$$

Hautes fréquences

Pour :

$$x \gg 1,$$

on a :

$$|H| \simeq 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}$$

L'asymptote est donc horizontale.

19.6 Étude à la pulsation propre

Pour :

$$\omega = \omega_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1,$$

la fonction de transfert devient :

$$H(j\omega_0) = \frac{-1}{j/Q}.$$

Donc :

$$H(j\omega_0) = jQ.$$

Par conséquent :

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = Q}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log_{10}(Q)}$$

La phase vaut :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = +\frac{\pi}{2} = +90^\circ}$$

Remarque :
La pulsation propre ω_0 n'est donc pas nécessairement une pulsation de coupure à $-3\,\text{dB}$.

19.7 Phase

Pour les basses fréquences :

$$H(j\omega) \simeq -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Le nombre réel est négatif, donc :

$$\boxed{\varphi \simeq \pi = 180^\circ}$$

À la pulsation propre :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ}$$

Aux hautes fréquences :

$$H(j\omega) \simeq 1,$$

donc :

$$\boxed{\varphi \simeq 0^\circ}$$

On retient :

$$\boxed{180^\circ \quad \longrightarrow \quad 90^\circ \quad \longrightarrow \quad 0^\circ}$$

lorsque la fréquence augmente.

19.8 Résonance

Un filtre passe-haut du deuxième ordre peut également présenter une résonance.
Une résonance apparaît lorsque :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Le gain présente alors un maximum supérieur à sa valeur asymptotique à haute fréquence.
Plus Q est grand, plus le phénomène de résonance est mar

20 Comparaison des filtres du deuxième ordre

En posant :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0},$$

les trois formes canoniques peuvent être regroupées dans le tableau suivant :

Type de filtre	Fonction de transfert
Passe-bas	$H(j\omega) = \dfrac{H_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$
Passe-bande	$H(j\omega) = \dfrac{H_0\, j\dfrac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$
Passe-haut	$H(j\omega) = \dfrac{-H_0 x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$

20.1 Comportements asymptotiques

Filtre	Basses fréquences	Hautes fréquences	Pentes
Passe-bas	$\lvert H\rvert \to H_0$	$\lvert H\rvert \to 0$	$0 \to -40$ dB/déc.
Passe-bande	$\lvert H\rvert \to 0$	$\lvert H\rvert \to 0$	$+20 \to -20$ dB/déc.
Passe-haut	$\lvert H\rvert \to 0$	$\lvert H\rvert \to H_0$	$+40 \to 0$ dB/déc.

20.2 Méthode pour reconnaître rapidement un filtre

Pour identifier la nature d'un filtre, il est souvent inutile de calculer immédiatement le module de sa fonction de transfert.
Il suffit d'étudier :

$$\boxed{H(0) \qquad \text{et} \qquad H(+\infty)}$$

On retient :

	$H(0)$	$H(+\infty)$
Passe-bas	H_0	0
Passe-bande	0	0
Passe-haut	0	H_0

Cette méthode permet d'identifier rapidement la nature du filtre avant toute étude détaillée.

21 Influence du facteur de qualité sur le diagramme de Bode

Considérons un filtre passe-bas du deuxième ordre de fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

On introduit la pulsation réduite :

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fonction de transfert devient :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}}$$

Le module est :

$$\boxed{|H| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}}$$

et le gain en décibels :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log_{10}(H_0) - 10\log_{10}\left[(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right]}$$

21.1 Diagramme asymptotique du gain

Basses fréquences

Pour :

$$x \ll 1,$$

on a :

$$H(j\omega) \simeq H_0.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(H_0)}$$

L'asymptote est horizontale.
Si $H_0 = 1$:

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 0\,\text{dB}}$$

Hautes fréquences

Pour :

$$x \gg 1,$$

on obtient :

$$H(j\omega) \simeq -\frac{H_0}{x^2}.$$

Donc :

$$|H| \simeq \frac{H_0}{x^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(H_0) - 40\log_{10}(x)}$$

L'asymptote possède donc une pente :

$$\boxed{-40\,\text{dB/décade}}$$

Les deux asymptotes se rencontrent pour :

$$\boxed{x = 1}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

21.2 Gain à la pulsation propre

Pour :

$$x = 1,$$

on obtient :

$$|H(\omega_0)| = QH_0.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log_{10}(QH_0)}$$

soit :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log_{10}(H_0) + 20\log_{10}(Q)}$$

Pour $H_0 = 1$:

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log_{10}(Q)}$$

21.3 Recherche d'une résonance

Une résonance correspond à l'existence d'un maximum du gain pour une pulsation non nulle.
Comme :

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{D(x)}}$$

avec :

$$D(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2},$$

le gain est maximal lorsque $D(x)$ est minimal.
Développons :

$$D(x) = 1 - 2x^2 + x^4 + \frac{x^2}{Q^2}.$$

Donc :

$$D(x) = 1 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right) x^2 + x^4.$$

On dérive par rapport à x :

$$\frac{dD}{dx} = 2x\left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2\right).$$

Pour une résonance à une pulsation non nulle :

$$\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x_r^2 = 0.$$

D'où :

$$x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

et :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

Pour que ω_r soit réelle et non nulle, il faut :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Il y a donc résonance uniquement si :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

21.4 Les trois cas à connaître

21.4.1 Cas 1 : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dans ce cas :

$$\boxed{Q < \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Il n'existe pas de pulsation de résonance non nulle.
Le gain décroît sans présenter de maximum.
On a donc :

$$\boxed{\text{Pas de résonance}}$$

La transition entre la bande passante et la bande atténuée est relativement progressive.

21.4.2 Cas 2 : $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour :

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

on est à la limite d'apparition de la résonance.
À la pulsation propre :

$$|H(\omega_0)| = QH_0 = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = G_{\text{dB,max}} - 3\,\text{dB}}$$

Dans ce cas particulier :

$$\boxed{\omega_c = \omega_0}$$

Le cas :

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

correspond au filtre de **Butterworth du deuxième ordre**.
Sa réponse en amplitude est maximale en bande passante sans présenter de pic de résonance.

21.4.3 Cas 3 : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lorsque :

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

le gain présente un maximum.
Il apparaît donc un phénomène de :

$$\boxed{\text{résonance}}$$

La pulsation de résonance est :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

On remarque que :

$$\boxed{\omega_r < \omega_0}$$

Lorsque Q augmente, la pulsation de résonance se rapproche de ω_0.

21.5 Gain maximal à la résonance

À la pulsation de résonance, on peut montrer que :

$$\boxed{|H|_{\max} = \frac{H_0 Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

Cette expression n'est valable que lorsque :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lorsque Q devient grand :

$$\frac{1}{4Q^2} \ll 1,$$

donc :

$$\boxed{|H|_{\max} \simeq Q H_0}$$

et :

$$\boxed{\omega_r \simeq \omega_0}$$

Ainsi, pour un facteur de qualité élevé, le pic de résonance est important et situé très près de la pulsation propre.

21.6 Résumé de l'influence de Q

Valeur de Q	**Résonance**	**Comportement**
$Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	Non	Gain décroissant sans pic
$Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	Limite	Réponse de Butterworth
$Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	Oui	Présence d'un pic de résonance
$Q \gg 1$	Forte	Pic étroit et important

21.7 Diagramme de phase

Pour le filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}.$$

Pour $H_0 > 0$, la phase évolue de :

$$\boxed{0^\circ \quad \longrightarrow \quad -180^\circ}$$

lorsque la fréquence augmente.
Aux basses fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq 0^\circ}$$

À la pulsation propre :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = -90^\circ}$$

Aux hautes fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq -180^\circ}$$

Le facteur de qualité Q modifie principalement la rapidité de la variation de la phase autour de ω_0.
Plus Q est élevé, plus la variation de phase est rapide au voisinage de la pulsation propre.

21.8 Résultats essentiels à retenir

Pour un filtre passe-bas du deuxième ordre :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

$\omega \ll \omega_0$:	$G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(H_0)$
$\omega \gg \omega_0$:	pente $-40\,\text{dB/décade}$
$\omega = \omega_0$:	$\lvert H\rvert = QH_0$
$Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:	présence d'une résonance
$Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:	$\omega_c = \omega_0$

22 Filtre passe-bande du deuxième ordre

22.1 Forme canonique

La fonction de transfert canonique d'un filtre passe-bande du deuxième ordre peut s'écrire :

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

où :
- H_0 représente le gain maximal ;
- ω_0 représente la pulsation propre ;
- Q représente le facteur de qualité.

On introduit la pulsation réduite :

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fonction de transfert devient :

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{j\dfrac{x}{Q}}{1-x^2 + j\dfrac{x}{Q}}}$$

Une autre forme particulièrement pratique est :

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

22.2 Étude qualitative

Étudions le comportement du filtre aux fréquences extrêmes.

Basses fréquences

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on obtient :

$$\boxed{|H| \longrightarrow 0}$$

Les très basses fréquences sont donc atténuées.

Hautes fréquences

Lorsque :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on obtient également :

$$\boxed{|H| \longrightarrow 0}$$

Les très hautes fréquences sont donc atténuées.
En revanche, pour :

$$\omega = \omega_0,$$

on a :

$$x = 1$$

et donc :

$$\boxed{H(j\omega_0) = H_0}$$

Ainsi :

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = H_0}$$

Le filtre transmet donc principalement les fréquences situées autour de ω_0.
Il s'agit d'un :

$$\boxed{\text{filtre passe-bande}}$$

22.3 Gain en amplitude

À partir de :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

on obtient :

$$\boxed{|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

soit :

$$\boxed{|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

22.4 Gain maximal

Le gain est maximal lorsque le dénominateur est minimal.
Cela se produit lorsque :

$$x - \frac{1}{x} = 0.$$

Donc :

$$x^2 = 1.$$

Comme $\omega > 0$:

$$\boxed{x = 1}$$

soit :

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

Le gain maximal est alors :

$$\boxed{|H|_{\max} = H_0}$$

et :

$$\boxed{G_{\text{dB,max}} = 20\log_{10}(H_0)}$$

Dans le cas d'un filtre passif pour lequel $H_0 = 1$:

$$\boxed{G_{\text{dB,max}} = 0\,\text{dB}}$$

22.5 Étude asymptotique

Basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$

Lorsque :

$$x \ll 1,$$

la fonction de transfert vérifie :

$$H(j\omega) \simeq j\frac{H_0}{Q}x.$$

Donc :

$$\boxed{|H| \simeq \frac{H_0}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Le gain en décibels devient :

$$G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{H_0}{Q}\right) + 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

La pente asymptotique vaut donc :

$$\boxed{+20\,\text{dB/décade}}$$

Hautes fréquences : $\omega \gg \omega_0$

Lorsque :

$$x \gg 1,$$

on obtient :

$$H(j\omega) \simeq \frac{H_0}{jQx}.$$

Donc :

$$\boxed{|H| \simeq \frac{H_0}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}}$$

Le gain en décibels devient :

$$G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}\left(\frac{H_0}{Q}\right) - 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

La pente asymptotique vaut donc :

$$\boxed{-20\,\text{dB/décade}}$$

22.6 Diagramme de Bode asymptotique

On retient donc :

Domaine	Pente
$\omega \ll \omega_0$	$+20\,\text{dB/décade}$
$\omega \gg \omega_0$	$-20\,\text{dB/décade}$

Les deux asymptotes se rencontrent pour :

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

À cette pulsation, leur valeur est :

$$\boxed{G_{\text{asymp}}(\omega_0) = 20\log_{10}\left(\frac{H_0}{Q}\right)}$$

Attention : cette valeur correspond aux asymptotes et non au gain réel.
Le gain réel à ω_0 vaut :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log_{10}(H_0)}$$

22.7 Fréquences de coupure

Les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} sont définies par :

$$\boxed{|H(\omega_c)| = \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}}$$

Comme :

$$|H|_{\max} = H_0,$$

on obtient :

$$\frac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi :

$$1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 2.$$

D'où :

$$\boxed{Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 1}$$

soit :

$$\boxed{\left|x-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{Q}}$$

Les deux solutions correspondent aux deux pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2}.

22.8 Expression des pulsations de coupure

Pour la première pulsation de coupure :

$$x-\frac{1}{x} = -\frac{1}{Q}.$$

Après multiplication par x :

$$x^2+\frac{x}{Q}-1 = 0.$$

La solution positive est :

$$\boxed{x_{c1} = \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}-\frac{1}{2Q}}$$

Pour la deuxième pulsation de coupure :

$$x-\frac{1}{x} = \frac{1}{Q}.$$

On obtient :

$$x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

La solution positive est :

$$\boxed{x_{c2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega_{c1} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right]}$$

et :

$$\boxed{\omega_{c2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right]}$$

22.9 Propriétés des pulsations de coupure

On peut montrer que :

$$\boxed{\omega_{c1}\omega_{c2} = \omega_0^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}}$$

La pulsation propre est donc la moyenne géométrique des deux pulsations de coupure.

22.10 Bande passante

La bande passante à $-3\,\text{dB}$ est définie par :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}}$$

À partir des expressions précédentes :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

En fréquence :

$$\boxed{\Delta f = f_{c2} - f_{c1}}$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

Ces relations sont fondamentales pour un filtre passe-bande du deuxième ordre.

22.11 Influence du facteur de qualité

Comme :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q},$$

on constate que lorsque Q augmente, la largeur de la bande passante diminue.
Ainsi :

$$\boxed{Q \text{ grand} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega \text{ faible}}$$

Le filtre laisse alors passer une bande étroite de fréquences autour de ω_0.
On dit que le filtre est **sélectif**.
Inversement :

$$\boxed{Q \text{ faible} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega \text{ grande}}$$

Le filtre est alors moins sélectif.

22.12 Phase du filtre passe-bande

La fonction de transfert peut s'écrire :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

Pour $H_0 > 0$, la phase est :

$$\boxed{\varphi(\omega) = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]}$$

en tenant compte du domaine de variation de la phase.
Aux basses fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq +90^\circ}$$

À la pulsation propre :

$$\boxed{\varphi(\omega_0) = 0^\circ}$$

Aux hautes fréquences :

$$\boxed{\varphi \simeq -90^\circ}$$

Ainsi, lorsque la fréquence augmente :

$$\boxed{+90^\circ \quad \longrightarrow \quad 0^\circ \quad \longrightarrow \quad -90^\circ}$$

22.13 Bilan du filtre passe-bande

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$\lvert H \rvert$	$\dfrac{H_0}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}$	H_0	$\dfrac{H_0}{Q}\dfrac{\omega_0}{\omega}$
Pente	$+20\,\text{dB/décade}$	–	$-20\,\text{dB/décade}$
φ	$+90°$	$0°$	$-90°$

Les résultats fondamentaux à retenir sont :

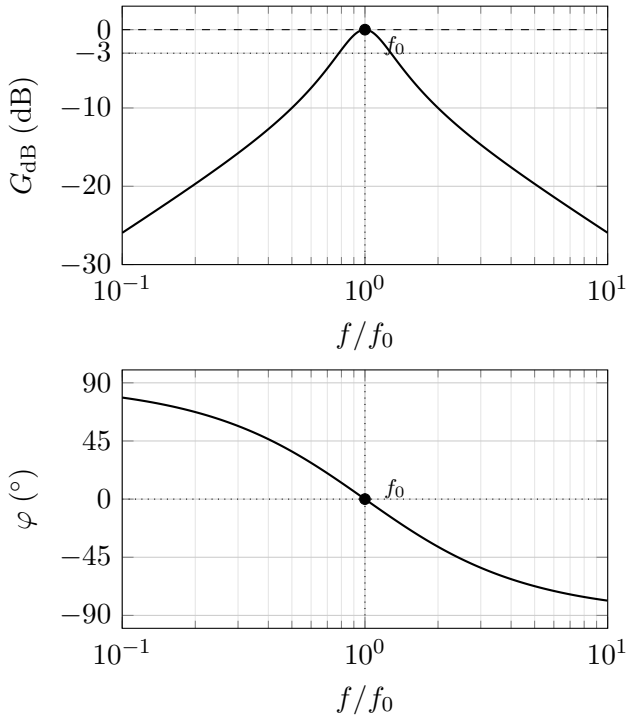
$$\boxed{|H|_{\max} = H_0 \qquad \text{pour} \qquad \omega = \omega_0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}}$$



23 Filtre coupe-bande du deuxième ordre

23.1 Définition

Un filtre **coupe-bande**, appelé également **filtre réjecteur**, atténue les fréquences situées autour d'une pulsation particulière ω_0 et transmet les basses et les hautes fréquences.

Sa forme canonique est :

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

où :

- H_0 est le gain en dehors de la bande coupée ;
- ω_0 est la pulsation propre ;
- Q est le facteur de qualité.

On introduit la pulsation réduite :

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fonction de transfert devient :

$$\boxed{H(j\omega) = H_0 \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

23.2 Étude qualitative

Basses fréquences

Pour :

$$\omega \longrightarrow 0,$$

on a :

$$x \longrightarrow 0.$$

Ainsi :

$$H(j\omega) \longrightarrow H_0.$$

Donc :

$$\boxed{|H| \longrightarrow H_0}$$

Les basses fréquences sont transmises.

À la pulsation propre

Pour :

$$\omega = \omega_0,$$

on a :

$$x = 1.$$

Le numérateur s'annule :

$$1 - x^2 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{H(j\omega_0) = 0}$$

et donc :

$$\boxed{|H(j\omega_0)| = 0}$$

La fréquence f_0 est donc totalement rejetée.
On parle d'**anti-résonance**.

Hautes fréquences

Pour :

$$\omega \longrightarrow +\infty,$$

on a :

$$x \longrightarrow +\infty.$$

Les termes dominants du numérateur et du dénominateur sont les termes en $-x^2$.
Ainsi :

$$H(j\omega) \simeq H_0 \frac{-x^2}{-x^2}.$$

Donc :

$$\boxed{H(j\omega) \longrightarrow H_0}$$

et :

$$\boxed{|H| \longrightarrow H_0}$$

Les hautes fréquences sont également transmises.
On a donc bien un :

$$\boxed{\text{filtre coupe-bande}}$$

23.3 Gain en amplitude

La fonction de transfert est :

$$H(j\omega) = H_0 \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}.$$

Son module vaut :

$$\boxed{|H| = H_0 \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}}$$

On vérifie immédiatement que :

$$\boxed{|H(0)| = H_0}$$

$$\boxed{|H(\omega_0)| = 0}$$

et :

$$\boxed{|H(+\infty)| = H_0}$$

23.4 Gain en décibels

Le gain en décibels est :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H|.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(H_0) + 20 \log_{10} |1 - x^2| - 10 \log_{10} \left[(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]}$$

Pour :

$$\omega = \omega_0,$$

on a :

$$|H| = 0.$$

Par conséquent :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) \longrightarrow -\infty}$$

23.5 Fréquences de coupure

Les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} sont définies par :

$$\boxed{|H(\omega_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}}$$

On écrit donc :

$$H_0 \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

Après simplification :

$$\frac{(1 - x^2)^2}{(1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}} = \frac{1}{2}.$$

On obtient :

$$\boxed{(1-x^2)^2 = \frac{x^2}{Q^2}}$$

soit :

$$\boxed{|1-x^2| = \frac{x}{Q}}$$

Cette équation possède deux solutions positives x_{c1} et x_{c2}.

23.6 Expression des pulsations de coupure

Pour la première pulsation de coupure :

$$1-x^2 = \frac{x}{Q}.$$

On obtient :

$$x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

La solution positive est :

$$\boxed{x_{c1} = \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}}$$

Pour la deuxième pulsation de coupure :

$$x^2 - 1 = \frac{x}{Q}.$$

On obtient :

$$x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0.$$

La solution positive est :

$$\boxed{x_{c2} = \sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega_{c1} = \omega_0 \left[\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} - \frac{1}{2Q}\right]}$$

et :

$$\boxed{\omega_{c2} = \omega_0 \left[\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}} + \frac{1}{2Q}\right]}$$

23.7 Propriétés des pulsations de coupure

Le produit des pulsations de coupure vérifie :

$$\boxed{\omega_{c1}\omega_{c2} = \omega_0^2}$$

On en déduit :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}}$$

La pulsation propre est donc la moyenne géométrique des deux pulsations de coupure.

23.8 Largeur de la bande coupée

La largeur de la bande coupée est :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}}$$

En utilisant les expressions précédentes :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

On obtient donc :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

En fréquence :

$$\boxed{\Delta f = f_{c2} - f_{c1}}$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f}}$$

23.9 Influence du facteur de qualité

Comme :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q},$$

plus Q est grand, plus la bande rejetée est étroite :

$$\boxed{Q \text{ grand} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega \text{ faible}}$$

Le filtre élimine alors une bande très étroite autour de ω_0.
Inversement :

$$\boxed{Q \text{ faible} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\omega \text{ grande}}$$

La bande de fréquences atténuées est alors plus large.

23.10 Diagramme de Bode

Aux basses fréquences :

$$|H| \simeq H_0,$$

donc :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(H_0)}$$

À la pulsation propre :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) \longrightarrow -\infty}$$

Aux hautes fréquences :

$$|H| \simeq H_0,$$

donc :

$$\boxed{G_{\text{dB}} \simeq 20\log_{10}(H_0)}$$

Le diagramme présente donc une forte atténuation centrée autour de ω_0.

23.11 Bilan du filtre coupe-bande

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$\lvert H\rvert$	H_0	0	H_0
G_{dB}	$20\log_{10}(H_0)$	$-\infty$	$20\log_{10}(H_0)$
Comportement	Transmis	Rejeté	Transmis

On retient les relations fondamentales :

$$\boxed{H(j\omega_0) = 0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}}$$

et :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$