

DS1 : Mécanique

Problème 1 : Mouvement d'une tige

Partie A.

Une tige AB rigide homogène de masse m de longueur L de moment d'inertie J par rapport à un axe qui est lui orthogonal et passant par son centre d'inertie, $J = \frac{1}{12}mL^2$.

La tige est posée en son milieu O sur un support horizontal Oz perpendiculaire au plan de la figure. Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On désigne par f le coefficient de frottement entre la tige et le support.

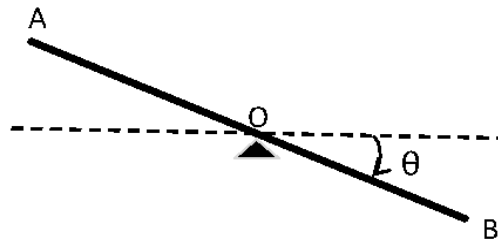


FIGURE 1 –

1. Soient T et N les composantes tangentielle et normale de l'action en O du support sur la tige.
Exprimer T et N en fonction de θ , m et g en supposant qu'il n'y a pas de glissement en O.
2. Enoncer la loi de frottement de Coulomb et donner la valeur θ_m de θ à partir de laquelle le glissement commence.
3. Si on communique à la tige AB une vitesse angulaire initiale ω_0 à partir de la position initiale $\theta_0 = 0$, comment évolue θ au cours du temps avant que le glissement commence ?

Partie B.

Une tige **T** de longueur $OB = 2L$ est formée par deux tiges homogènes T_1 et T_2 similaires à la tige précédente de même longueur $OA = OB = L$ et de masses respectives m_1 et $m_2 = 5m_1$. Elles sont soudées en A dans le prolongement l'une de l'autre. Soit $M = 6m_1$ sa masse totale, **T** est mobile sans frottement dans le plan xOy vertical autour d'une articulation parfaite

d'axe $z'z$ passant par l'extrémité O Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est dirigé selon Ox vertical ; $\vec{g} = g\vec{i}$.

Le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La position de la tige est définie par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OB})$. Les grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$. $\vec{k}$ étant le vecteur unitaire de l'axe Oz.

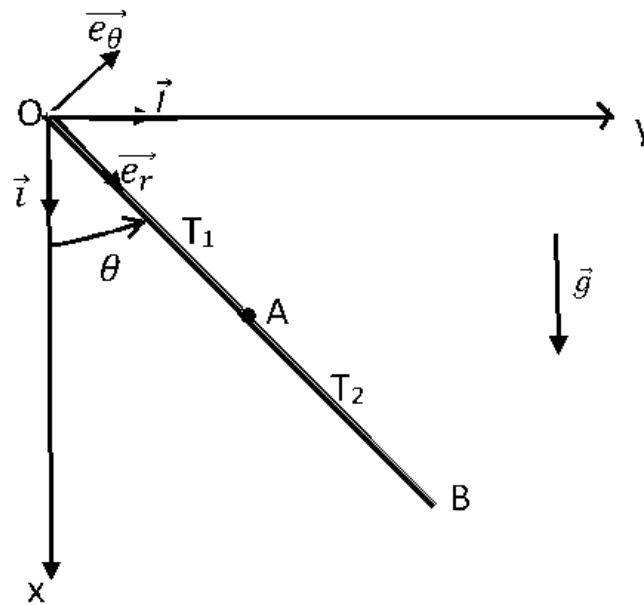


FIGURE 2 –

B.1. Détermination des éléments d'inertie et cinétiques de T :

B.1.1. Soit G le centre de masse de T. On pose : $a = OG = \alpha L$. Trouver la valeur numérique de α .

B.1.2. Soit J_Δ le moment d'inertie de T par rapport à Δ axe $z'Oz$. On pose $J_\Delta = \beta ML^2$.

Trouver la valeur numérique de β .

Trouver également le moment d'inertie J_{Δ_G} par rapport à l'axe Δ_G passant par G et parallèle $z'Oz$.

Par la suite on appelle '*constantes*' M, L, g, α et β et '*variables*' θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

B.1.3. Exprimer pour la tige T en fonction des constantes et variables :

a) La résultante cinétique $\vec{P}$ et $\frac{d\vec{P}}{dt}$ sa dérivée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

b) Le moment cinétique scalaire L_Δ par rapport à Δ et sa dérivée par rapport au temps.

c) L'énergie cinétique E_c .

d) L'énergie potentielle de pesanteur E_p , on prend $E_p(\theta = 0) = 0$.

e) En déduire l'énergie mécanique de la tige T.

B.2. Equation du mouvement de la tige T

La tige est abandonnée sans vitesse initiale d'une position $\theta = \theta_0$.

B.2.1. Enoncer le théorème du moment cinétique puis l'appliquer au point O. En déduire l'équation du mouvement de la tige T.

B.2.2. Après avoir justifier que l'énergie mécanique de la tige T est conservative déduire une équation qui lie θ et $\dot{\theta}^2$ et les constantes.

B.3. Calcul de la réaction d'axe

B.3.1. Enoncer le théorème de la résultante cinétique. L'appliquer à la tige T, et en déduire en fonction de θ seulement et des constantes, les composantes R_r et R_θ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de la résultante des forces de liaison qu'exerce l'articulation sur la tige au point O.

B.3.2. Calculer numériquement ces composantes quand $\theta = \frac{\pi}{2}$ puis $\theta = 0$.
 On prendra $\theta_0 = \pi$; $M = 12kg$; $L = 1m$; $g = 9.8m.s^{-2}$; $\alpha = \frac{4}{3}$ et $\beta = 2$.

B.4. Calcul de la contrainte à la soudure des tiges

On veut évaluer le système des forces intérieures qu'exerce au cours du mouvement de la tige T_1 sur la tige T_2 à l'endroit de la soudure en A.

Cette action sera représentée par une force $\vec{R}_A = R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta$ appliquée en A et un couple de moment $\vec{\Gamma}$ suivant le vecteur K.

B.4.1. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à la tige T_2 seule.

B.4.2. Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à un axe parallèle à Δ passant par un point que l'on précisera.

B.4.3. Déterminer R_r et R_θ

B.4.4. Déterminer $\Gamma(\theta)$.

B.4.5. Calculer les valeurs maximales prises par $|R_r|$ et $|R_\theta|$, les comparer au poids m_2g de la tige T_2 .

B.4.6. La soudure casse si $\|\vec{R}_A\|$ dépasse la limite de rupture supposées égale à $4m_2g$; se produit-elle pendant le mouvement? Si oui à quel endroit?

Problème 2 : Satellites artificiels

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés des satellites artificiels terrestres. Dans le cadre de cette étude on considère un modèle simple se basant sur les hypothèses suivantes :

- ? le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique R_G supposé galiléen ;
- ? la Terre de masse M_T est supposée sphérique de centre T et de rayon R_T ;
- ? le satellite artificiel sera assimilé à un point matériel S de masse m ;
- ? sauf mention explicite du contraire, le satellite est supposé soumis à la seule action de la Terre caractérisée par le champ de gravitation terrestre dont l'intensité à une distance r du centre T de la Terre est notée $G(r)$;

1^{ère} partie
Satellites circulaires

On considère le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R .

1. Satellites en orbite basse

- (a) Donner l'expression de la force qu'exerce la terre sur le satellite.
- (b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique au satellite, trouver directement l'expression de sa vitesse v sur son orbite circulaire de rayon R .
- (c) En déduire la période de révolution T du mouvement du satellite. Retrouve-t-on la troisième loi de KEPLER ?
- (d) Y a-t-il une restriction concernant le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite ?

2. Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite qui apparaît fixe à un observateur terrestre.

- (a) Quel est l'intérêt de tels satellites ? Citer un exemple d'application.
- (b) Quelle est sa période de rotation ?
- (c) Exprimer l'altitude z_G à laquelle il faut placer le satellite pour qu'il soit géostationnaire en fonction de g_0 , R_T et T_0 qui désigne la période de rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.
- (d) Calculer numériquement z_G en prenant $\pi^2 = 10$ et $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$, $R_T = 6.10^6 \text{ m}$ et $T_0 = 9.10^4 \text{ s}$.
- (e) Préciser le plan de la trajectoire ainsi que le sens de rotation du satellite.

3. Transfert d'orbite

On veut transférer un satellite artificiel de masse m d'une orbite circulaire basse (C_B) de rayon R_B à une orbite géostationnaire (C_G) de rayon R_G . Pour cela on emprunte une orbite de transfert elliptique appelée ellipse de HOHMANN. Une telle ellipse (E_H) est tangente aux deux trajectoires (C_B) et (C_G) ; son périhélie P est sur l'orbite basse alors que son apogée A est sur l'orbite géostationnaire. On appelle Δv_1 et Δv_2 les variations de vitesse qu'il faut communiquer au satellite pour le faire passer respectivement de (C_B) à (E_H) et de (E_H) à (C_G).

- (a) Quelle est la particularité des plans des trois trajectoires ? Représenter graphiquement (C_B) , (C_G) et (E_H) .
- (b) En exprimant la conservation de l'énergie et du moment cinétique sur l'orbite de transfert, exprimer les vitesses du satellite v_A à l'apogée et v_P au périgée sur l'orbite de transfert en fonction de g_0 , R_T , R_B et R_G .
- (c) En déduire Δv_1 et Δv_2 . Commenter
- (d) Quelle est la durée minimale Δt de la phase de transfert sur l'ellipse de HOHMANN ?
- (e) Déterminer l'excentricité e_H de l'ellipse de HOHMANN.

2^{ème} partie

Etude générale

1. En quelle année, le Maroc a-t-il lancé son premier satellite artificiel ? Quel nom porte-t-il ? A quel usage principal est-il destiné ?
2. Exprimer l'intensité du champ de pesanteur terrestre $G(r)$ à la distance r du centre T de la Terre en fonction de r , R_T et $g_0 = G(R_T)$ qui désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.
3. La mise sur orbite d'un satellite artificiel se fait à partir d'une fusée en un point S_0 situé à une distance r_0 du centre T de la Terre, $r_0 > R_T$. La vitesse de lancement du satellite par rapport à R_G est $\vec{v}_0$. On posera dans toute la suite

$$\alpha_0 = \frac{r_0 v_0^2}{g_0 R_T^2} \quad \text{et} \quad \beta_0 = (\vec{T\hat{S}_0}, \vec{v}_0)$$

- (a) Montrer que, après sa mise sur orbite, le satellite parcourt une trajectoire plane. Caractériser complètement le plan de la trajectoire.
- (b) Dans toute la suite, on repérera la position S du satellite dans le plan de sa trajectoire par :
 - la distance r telle que $\vec{r} = \vec{TS} = r\vec{u}_r$;
 - l'angle $(\vec{T\hat{S}_0}; \vec{TS})$ orienté de $\vec{T\hat{S}_0}$ vers $\vec{TS}$.

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ constitue la base orthonormée directe. Faire un schéma représentatif dans le plan de la trajectoire du satellite montrant T , S_0 , S , $\vec{r}_0 = \vec{T\hat{S}_0}$, $\vec{r}$, $\vec{v}_0$, θ et β_0 .

- (c) Montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du satellite en T peut s'écrire $\vec{\sigma} = \sigma \vec{u}_z$ et donner l'expression de σ en fonction de m , r_0 , v_0 et β_0 .

- (d) On introduit le vecteur $\vec{e}$ défini par : $\vec{e} = \frac{1}{GMm} \vec{v} \wedge \vec{\sigma} - \vec{e}_r$
 Montrer que le vecteur $\vec{e}$ est une constante du mouvement. Dans quel plan se situe $\vec{e}$?
- ii. En exprimant le produit scalaire $\vec{r} \cdot \vec{e}$, montrer que l'équation polaire de la trajectoire du satellite peut se mettre sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

où p , e et θ_0 sont des constantes, $p > 0$ et $e > 0$. Exorimer p et e en fonction σ , G , M , m , Que représente θ_0 ?

- iii. Exprimer p en fonction de α_0 , r_0 et β_0 et montrer que e est donnée par :

$$e^2 = 1 + \alpha_0(\alpha_0 - 2)\sin^2\beta_0$$

- iv. Tracer les courbes représentatives de e en fonction de α_0 pour les valeurs suivantes de β_0 : 0 et $\frac{\pi}{2}$.
- v. Discuter la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de α_0 et en d"duire la valeur de la vitesse de libération v_l à l'altitude $z_0 = r_0 - R_T$.
- vi. quelles conditions sur α_0 et β_0 la trajectoire est-elle circulaire ? En déduire la vitesse du satellite sur son orbite circulaire de rayon R .