

DS2 : Mécanique

Problème 1 : Étude du mouvement d'un satellite

La terre est assimilée à une sphère homogène de centre O de rayon R et de masse M . On note $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{USI}$ la constante de gravitation universelle.

On étudie le mouvement du centre d'inertie C d'un satellite de masse $m = 10^3 \text{kg}$ en se plaçant dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Le satellite évolue à une altitude suffisamment importante pour qu'on puisse négliger l'action de l'atmosphère terrestre.

Analyse qualitative

1. Donner l'expression de la force de gravitation exercée par la terre sur le satellite.
2. On note respectivement M, L, T la dimension d'une masse, d'une longueur et d'un temps. Déterminer la dimension de la constante de gravitation en fonction des symboles M, L, T. On exprimera la dimension de G sous la forme $M^\alpha L^\beta T^\gamma$ et on déterminera la valeur numérique des exposants α , β et γ .
3. Indiquer pourquoi on peut dire que le mouvement de C est un mouvement à force centrale? Quelles sont les conséquences de la remarque précédente (aucun calcul n'est demandé)?
4. Définir le référentiel géocentrique. Est-ce que ce référentiel est solidaire de la terre dans son mouvement de rotation autour des pôles? Indiquer pourquoi ce référentiel n'est pas en toute rigueur galiléen. Citer le nom d'un référentiel galiléen. À quelle condition qualitative peut-on considérer que le référentiel géocentrique est galiléen lorsqu'on réalise une expérience?
5. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $E_p(r)$ en fonction de r. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système? Définir les termes « état lié » et « état de diffusion » pour un système soumis à une force conservative.
6. Donner l'ordre de grandeur de la hauteur de l'atmosphère terrestre. Si l'on tenait compte de l'action de l'atmosphère sur le satellite comment évoluerait qualitativement l'énergie mécanique du satellite (on justifiera la réponse). En déduire l'évolution qualitative de l'altitude et la vitesse du satellite si l'on prenait en compte l'action de l'atmosphère terrestre.

Etude de la trajectoire circulaire du satellite

7. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement de C est plan. On admettra qu'à un instant pris comme origine des dates le moment cinétique du satellite calculé en O est non nul : $\vec{L}_O(t=0) \neq 0$. On précisera où cette dernière hypothèse intervient dans le raisonnement. Préciser alors le plan de la trajectoire.
8. Dans le plan du mouvement, on repère la position de C par ses coordonnées polaires r et θ . Montrer que l'accélération de C s'écrit

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta$$

Déterminer les deux équations du mouvement. On notera une constante intervenant dans l'une des équations.

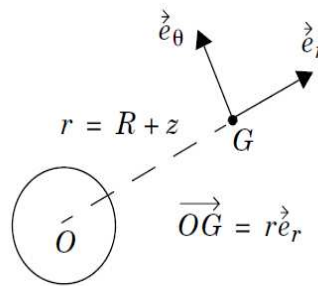


FIGURE 1 –

9. On étudie la possibilité d'une trajectoire circulaire de rayon r . Montrer que le mouvement est uniforme. Déterminer alors la vitesse angulaire du mouvement en fonction de G , M et r_0 . Déterminer la constante C en fonction de G , M et r_0 .
10. Le satellite évolue à une altitude sur une trajectoire circulaire. Calculer numériquement :
 - la période de révolution $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ dans le référentiel géocentrique,
 - l'énergie mécanique E_m ,
 - la constante C .
11. On suppose dorénavant que le satellite possède une trajectoire circulaire contenue dans le plan équatorial. On note $T \approx 24H$ la période de révolution terrestre dans son mouvement autour de l'axe des pôles. Évaluer la période relative T_r de révolution du satellite pour un observateur terrestre en fonction des paramètres T et T_0 . On pourra, par exemple, raisonner dans le référentiel géocentrique à partir d'un schéma figurant deux positions successives du satellite à l'aplomb d'un observateur terrestre. On tiendra compte d'une part du fait que le satellite possède une période de rotation T_0 inférieure à la période de rotation terrestre et d'autre part du fait que le satellite et la terre tournent dans le même sens. Calculer numériquement la période pour T_r un satellite évoluant à une altitude $z = 600km$.

Etude de l'influence du champ magnétique terrestre sur le satellite

Lors de sa mise sur orbite circulaire, le satellite acquiert une charge électrique négative Q due aux interactions avec l'atmosphère terrestre. On étudie dans cette partie, l'influence du champ magnétique terrestre $\vec{B}_0$ sur le mouvement du satellite chargé. On raisonne dans un **référentiel terrestre**. On suppose qu'initialement la trajectoire du satellite est une trajectoire circulaire, de rayon $r = R + z$, $z = 600km$, contenue dans le plan équatorial. Le mouvement du satellite s'effectue à la vitesse angulaire $\omega_r = \frac{2\pi}{T_r}$ d'ouest en est.

On modélise grossièrement la forme des lignes de champ magnétique terrestre par des cercles (fixes dans un référentiel terrestre) dont les caractéristiques vérifient les éléments suivants :

- les cercles ont pour centre le point O centre de la terre,
- le plan de chaque cercle est un plan méridien, perpendiculaire au plan équatorial,
- les cercles sont orientés du pôle sud géographique vers le pôle nord géographique.

On supposera de plus que le champ magnétique terrestre varie peu sur des distances de l'ordre de grandeur des dimensions du satellite.

12. Donner un ordre de grandeur du module du champ magnétique terrestre mesuré au sol. Connaissez-vous l'une des sources du champ magnétique terrestre ? Donner un ordre de grandeur des champs magnétiques continus les plus intenses que l'homme sait réaliser à l'heure actuelle.
13. Donner l'expression de la force magnétique subie par le satellite.
14. Réaliser un schéma représentant :
 - le plan de la trajectoire orientée du satellite vue du pôle Nord géographique,
 - le sens du champ magnétique terrestre $\vec{B}_0$,
 - le sens de la force magnétique.
15. Quelle est l'influence de la force magnétique sur le mouvement du satellite ?
16. Indiquer pourquoi on peut prévoir l'existence d'un champ électrique dans le satellite. Donner l'expression de ce champ électrique. Préciser son sens sur le schéma précédent. Donner un ordre de grandeur d'une des dimensions du satellite dont on rappelle que la masse est $m = 10^3 \text{ kg}$. En déduire un ordre de grandeur de la tension électrique U_m qui peut apparaître entre deux points du satellite ($z = 600 \text{ km}$). On utilisera pour la valeur numérique du champ magnétique $\vec{B}_0$, la valeur retenue à la question 12. Commenter la valeur numérique de U_m .

Etude de la stabilité de la trajectoire circulaire

On se place de nouveau dans le référentiel géocentrique et l'on ignore la charge électrique portée par le satellite ($Q=0$). Afin d'étudier la stabilité de la trajectoire circulaire on suppose qu'à un instant pris comme origine des dates le satellite est faiblement écarté de sa trajectoire circulaire. On pose $r = r_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$. On note $\varepsilon_0 = \varepsilon(t = 0)$ et on suppose que $\frac{d\varepsilon}{dt}(0) = 0$. Dans toute la suite du problème on raisonnera au premier ordre en ε . Compte tenu des hypothèses, on admettra qu'on peut écrire au premier ordre $r^2\dot{\theta} \approx C$ où la constante C a la valeur calculée à la question 9.

17. Déterminer, sans approximation supplémentaire, l'équation vérifiée par la variable ε . On établira une équation où ne figure plus le paramètre θ .
18. Montrer qu'au premier ordre l'équation précédente s'écrit $\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -\omega_1^2\varepsilon$. Donner l'expression de la pulsation ω_1 . Que remarque-t-on ? Conclure quant à la stabilité de la trajectoire. Déterminer $\varepsilon(t)$.
19. Exprimer au premier ordre la pulsation $\frac{d\theta}{dt}$ en fonction du temps et des données du problème. Quel résultat retrouve-t-on si dans l'expression précédente on réalise $\varepsilon_0 = 0$?
20. Esquisser la forme de la trajectoire issue de l'analyse précédente. Quelle est la forme de la trajectoire exacte ? Quelle conclusion peut-on faire concernant les résultats obtenus précédemment ? On s'attachera, en particulier, à discuter l'existence de trajectoire circulaire pour le mouvement du centre d'inertie du satellite.

Problème 2 : Mouvement d'un cylindre sur un plateau

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d'un cylindre (C). Le plateau, de masse M est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène, de masse m , de rayon a et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau.

A l'instant $t = 0$ on applique au plateau une force $\vec{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\vec{R} = T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0$. Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f . Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est $J = \frac{1}{2}ma^2$. On désigne par $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à R_G , par $x = KI$ avec $I \equiv K$ en $x = 0$ à l'instant initial $t = 0$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère R_0 est repéré par $X = OG$ avec $X = 0$ pour $t = 0$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}_0$.

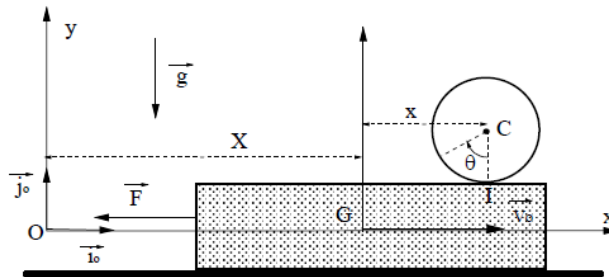


FIGURE 2 –

A) Cas du roulement sans glissement du cylindre sur le plateau

1. Faites un bilan des forces agissant sur le cylindre, et sur le plateau.
2. Etablir la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.
3. En appliquant le PFD dans le repère R_0 au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.
4. Etablir la relation liant $\dot{x}$ et $\dot{X}$. En déduire que $x(t) = \frac{Ft^2}{3M + m}$.
5. Exprimer $X(t)$ en fonction de F , $\vec{v}_0$, m , M et t . Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.
6. Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$, donner les valeurs de la force de frottement T et de $\vec{v}(C/R_0)$.
7. Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

B) Cas du roulement avec glissement du cylindre sur le plateau

8. Donner l'expression de la force de frottement T .
9. Exprimer la vitesse de glissement, $\vec{v}_g(C/P)$, du cylindre (C) par rapport au plan (P) en fonction de m , M , F , f , g et t (g est l'accélération de la gravité).
10. Trouver, en fonction de m , M , F , f et g , l'instant t_1 correspondant à l'arrêt du plateau.
11. Pour $t \geq t_1$ le plateau restera immobile.

- (a) Déterminer $\vec{v}(C/R_0)$ en fonction m, M, F, f, g, v_0 et t .
- (b) Trouver, en fonction de f, g et v_0 , l'instant t_2 où la vitesse de glissement s'annule.
12. Pour $t \geq t_2$ déterminer $\vec{v}(C/R_0)$ et préciser la nature du mouvement du cylindre.

Problème 3 : Mouvement de rotation d'une plaque

Le référentiel terrestre R_0 est considéré comme galiléen. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un trièdre orthonormé, O étant un point fixe de R_0 et $(O, \vec{k})$ la verticale ascendante; le champ de pesanteur est supposé uniforme dans la région considérée $\vec{g} = -g\vec{k}$. Une plaque plane homogène ayant la forme carré C de côté $2a$, de masse M , et de centre de masse G est mobile sans frottement autour d'un axe matériel Δ confondu avec $(O, \vec{j})$ de telle sorte que C soit astreint à se déplacer dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, un de ses sommets restant confondu avec le point fixe O . La position du carré à l'instant t est repérée par l'angle $\theta = (\vec{j}, \vec{OG})$ figure 3. L'axe Δ est mis en rotation autour de la verticale $(O, \vec{k})$ par un moteur qui lui impose un vecteur rotation constant $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$. On se propose d'étudier le mouvement de C par rapport au référentiel R lié au trièdre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne le moment d'inertie du carré par rapport à l'axe Gy est $J_G = \frac{2}{3}Ma^2$.

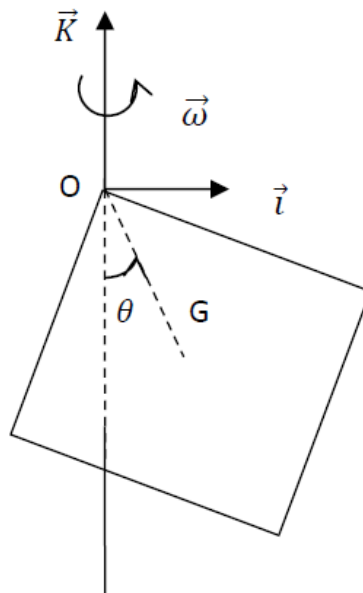


FIGURE 3 –

1. Exprimer en fonction de $\dot{\theta}$ de M et de a l'énergie cinétique E_c de C dans son mouvement par rapport à R .
2. Exprimer en fonction de M, g, a et l'énergie potentielle de pesanteur E_{Pp} de C .
3. Montrer que la force d'inertie d'entraînement $d\vec{f}_e$ s'exerce sur un élément de masse dm de C situé à la distance x da l'axe $(O, \vec{k})$ dérive d'une énergie potentielle dE_{Pi} que l'on exprimera en fonction de ω, x et dm .
4. Exprimer en fonction de M, ω, a et θ l'énergie potentielle d'entraînement E_{Pi} de C (il est possible d'éviter des intégrations en utilisant convenablement le théorème de Huygens et en admettant le résultat suivant : le moment d'inertie du carré par

- rapport à un axe quelconque passant par G et contenu dans son plan est $J_{G,k} = \frac{1}{3}Ma^2$).
5. A l'aide des résultats précédents, calculer l'angle θ_{eq} qui correspond à une position d'équilibre stable de C par rapport à R. Montrer que θ_{eq} n'est différent de zéro que si ω est supérieur à une valeur ω_c que l'on exprimera en fonction de g et de a. Quelle valeur ω_{eq} faut-il donner à ω pour avoir $\theta_{eq} = 60^\circ$?
 6. ω ayant la valeur ω_{eq} , on abandonne C à l'instant $t = 0$ avec les conditions initiales : $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$ Décrire le mouvement de C et préciser la valeur θ_{max} du maximum de $\theta(t)$.