

DS3 : Mécanique Durée : 4 H

Problème 1 : Le satellite Jason 2

Lancé le 20 juin 2008 de Vandenberg (Californie), le satellite océanographique Jason 2 permet, entre autre, de mesurer la hauteur des océans. Le problème étudie la trajectoire de ce satellite au-dessus de l'ionosphère, en considérant la terre comme sphérique.

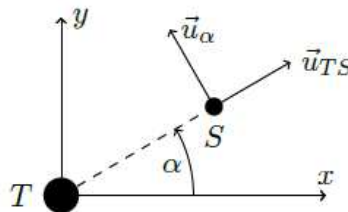


FIGURE 1 –

A – Étude de l'orbite

A.1) Rappeler l'expression de la force de gravitation qu'exerce la Terre (centre T, masse M_T) sur un satellite (point matériel S, masse m), en fonction de la constante de gravitation G , des masses M_T et m , de la distance $r = TS$ et du vecteur unitaire $\vec{u}_{TS} = \frac{\vec{TS}}{TS}$.

A.2) On se place dans le référentiel géocentrique (T, x_g, y_g, z_g) noté (R_g) , de base fixe $(\vec{e}_{xg}, \vec{e}_{yg}, \vec{e}_{zg})$

a) Définir le référentiel géocentrique. Pourquoi ce référentiel n'est-il pas rigoureusement galiléen ? Justifier.

Dans toute la suite, le référentiel géocentrique (R_g) est considéré comme galiléen, sauf mention contraire, seule l'action de la Terre est prise en compte.

b) Dans ce référentiel, quelles sont les deux grandeurs mécaniques du satellite qui se conservent (on justifiera la réponse) ?

Quelles caractéristiques du mouvement peut-on en déduire ?

A.3) On se propose d'établir l'expression de la trajectoire du satellite autour de la Terre à partir de l'invariant dynamique de Runge-Lenz. On définit le vecteur de Runge-Lenz par : $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{\sigma}_T - GM_T m \vec{u}_{TS}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du satellite

dans (R_g) et $\vec{\sigma}_T$ le moment cinétique du satellite dans (R_g) , calculé en T.

a) Calculer $\frac{d\vec{R}}{dt}$ dans (R_g) . Conclure.

b) Dans quel plan se trouve $\vec{R}$? Justifier.

c) On note R la norme de $\vec{R}$ et β l'angle entre $\vec{R}$ et $T\vec{S}$.

Montrer que : $\vec{R} \cdot \vec{u}_{TS} = \frac{\sigma_T^2}{m \cdot r} - GM_T m$

où σ_T est la norme du moment cinétique $\vec{\sigma}_T$ du satellite. En déduire l'expression de la trajectoire du satellite sous la forme : $r(\beta) = \frac{p}{1 + e \cos \beta}$

Donner les expressions de p et e en fonction de σ_T , G, M_T , m et R.

Suivant les valeurs de e, rappeler les différentes trajectoires possibles.

A.4) On admet que la trajectoire de Jason 2 est circulaire (en réalité, $e = 9,5 \cdot 10^{-5}$), de centre T, de rayon $r_0 = 7714 \text{ km}$, soit une altitude $h = 1336 \text{ km}$ (juste au dessus de l'ionosphère). La masse du satellite Jason 2 est $m = 525 \text{ kg}$. Établir en fonction de G, M_T , m et r_0 , les expressions de :

la norme de la vitesse orbitale du satellite v_0 ;

la période de révolution T_0 ;

son énergie mécanique E_m .

Calculer numériquement ces grandeurs pour le satellite Jason 2.

Constante de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$;

Masse de la Terre $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Problème 2 : Mouvement d'un cerceau sur un plan incliné

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un cerceau de masse m, modélisé par un cercle de centre C et de rayon R. Ces mouvements auront lieu dans le plan vertical $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le long d'un plan incliné de longueur suffisante, faisant l'angle α avec l'horizontale. Le contact en I du cerceau et du plan incliné est toujours supposé réalisé, et il est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f (terme positif et constant). On posera $\vec{OI} = x\vec{i}$.

Dans tout le problème on raisonne dans le référentiel R. On note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère lié à R supposé galiléen.

On désignera par :

$\vec{v} = v\vec{i}$ le vecteur vitesse de C,

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ le vecteur vitesse de rotation du cerceau,

$\vec{V} = V\vec{i}$ le vecteur vitesse de glissement du cerceau par rapport au plan incliné,

$\vec{R} = T\vec{i} + N\vec{j}$ la réaction du plan incliné sur le cerceau,

$J = mR^2$: le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe $C\vec{k}$.

A l'instant origine ($t = 0$), I se trouve en O et les conditions initiales imposées au cerceau sont $R.\omega_o > v_o > 0$.

Données numériques

$m = 300 \text{ g}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ (accélération de la pesanteur); $f = 0,2$; $v_o = 2 \text{ m.s}^{-1}$; $R\omega_o = 7 \text{ m.s}^{-1}$; $\sin\alpha = 0,1$

Uniquement pour les applications numériques, on confondra $\cos\alpha$ et 1.

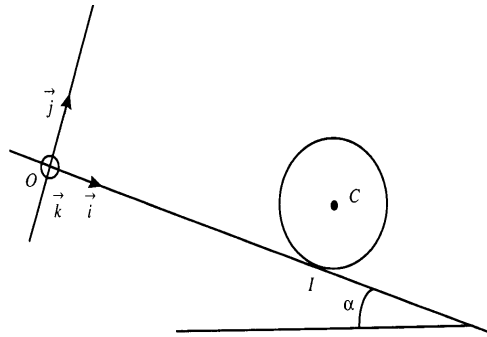


FIGURE 2 –

I. Préliminaires

1) Définir la vitesse de glissement d'un solide S_2 par rapport au solide S_1 au point I dans un référentiel R donné.

Dépend t-elle du référentiel ?

2) Vérifier que la vitesse de glissement $\vec{V}$ (vitesse du point I du cerceau) à un instant quelconque est égale à $(v + R.\omega)\vec{i}$

3) Exprimer l'énergie cinétique E_c du cerceau à un instant quelconque en fonction de m , v , et $R.\omega$.

4) Grâce au théorème du centre de masse et du théorème du moment cinétique et sans hypothèse particulière sur les mouvements du cerceau, trouver 3 relations scalaires liant $\dot{V}$ et $R.\dot{\omega}$ aux données du problème.

5) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique : en déduire une relation homogène à une puissance liant $\dot{V}$ et $R.\dot{\omega}$ aux données.

6) L'équation obtenue au I.5 est-elle indépendante de celles obtenues au I.4 ?

6) Calculer ω_o sachant que $J = 75 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$.

II. Première phase

1) Calculer $V(t = 0)$. En déduire précisément les caractéristiques du mouvement ultérieur du cerceau. Exprimer T.

- 2) Trouver les lois d'évolution de v , $R.\omega$ et V en fonction du temps. On pourra poser $a = (f \cos \alpha - \sin \alpha)g$. Calculer numériquement a .
- 3) En déduire que v s'annule pour un instant $t = t_1$ à déterminer. Que valent alors $R.\omega$ et V ? (on les désignera respectivement par $R.\omega_1$ et V_1)
- 4) Exprimer la distance x_1 parcourue par C pendant cette première phase.
- 5) Application numérique :
calculer T_1 (T_1 désigne la réaction du plan incliné selon i pour cette phase 1), t_1 , $R.\omega_1$, V_1 et x_1 .

III. Deuxième phase

- 1) Décrire le type de mouvement pour $t > t_1$.
- 2) Quelles sont les lois d'évolution de v , $R.\omega$, et V en fonction du temps au cours de cette deuxième phase?
- 3) Montrer que V va s'annuler pour un instant $t = t_2$ à déterminer. Que valent alors $R.\omega$ et v ? (respectivement $R.\omega_2$, et v_2).
- 4) Préciser la position x_2 , de C à cet instant t_2 .
- 5) Application numérique :
calculer t_2 , $R.\omega_2$, v_2 et x_2 .

IV. Troisième phase

On pourra prendre une nouvelle origine des temps au début de cette troisième phase ($t' = 0$).

- 1) Décrire le type de mouvement ultérieur.
- 2) Quelles sont les lois d'évolution de v , $R.\omega$ et T en fonction de t' au cours de cette troisième phase?
- 3) Comment cette phase se termine-t-elle? Préciser l'instant $t' = t'_1$. Que vaut alors $R.\omega$ (désigné par $R.\omega'_1$)
- 4) Préciser la position x'_1 de C à cet instant t'_1 .
- 5) Application numérique : calculer T , t'_1 et x'_1 .

V. Représentation graphique

Représenter sur un même graphique V et $R.\omega$ en fonction du temps pour les trois phases précédentes. Donner simplement la nature du mouvement au delà

de la troisième phase.

VI. Aspect énergétique

1) Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants $t' = 0$ et $t' = t'_1$. Faire l'application numérique.

Que vaut, entre ces mêmes instants, le travail de la réaction R? Retrouver littéralement la variation d'énergie cinétique par application du théorème de l'énergie cinétique.

2) Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$.

Faire l'application numérique. Retrouver cette valeur en calculant numériquement les différents travaux mis en jeu.

Problème 3 : Roulement d'un disque dans un cylindre

Un disque D, homogène, de masse m , de rayon a , de centre O d'axe Oy horizontal, de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à cet axe roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre fixe creux de rayon b , de centre O_0 et d'axe O_0y . O_0z est la verticale descendante et O_0y horizontal et orthogonal à l'axe Ox. On note θ l'angle orientée entre O_0z et O_0O et φ l'angle dont tourne le cylindre mobile dans le repère barycentrique Oxyz. On appelle I le point de contact entre le cylindre et le disque, $\vec{N} = -N\vec{e}_r$ et $\vec{T} = T\vec{e}_\theta$ les composantes normale et tangentielle de la force exercée par le cylindre sur le disque mobile (voir figure 3).

L'étude s'effectue dans le référentiel R lié au cylindre supposé galiléen.

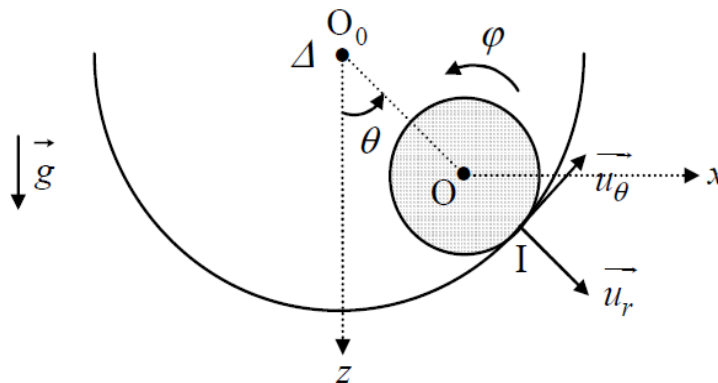


FIGURE 3 –

1. Établir la relation traduisant le roulement sans glissement .
2. Déterminer, en fonction de θ de ses dérivées et des constantes du problème, l'énergie cinétique du disque dans R .
3. Déterminer, en fonction de θ et des constantes du problème, l'énergie potentielle du disque .
4. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par θ (équation 1).
5. Déterminer, en fonction de θ de ses dérivées et des constantes du problème, le moment cinétique au point I, du disque .
6. En appliquant le théorème du moment cinétique, retrouver l'équation différentielle (1).
7. Trouver la période des petites oscillations.
8. Déterminer l'accélération du centre de masse O du disque dans R .
9. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au disque, Déterminer les composantes de la réaction N et T.
10. A l'instant initial, $\theta = 0$ et on communique au centre de masse O du disque une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.
 A l'aide de l'équation (1), décrire les circonstances du mouvement. Préciser en particulier la valeur minimale v_m de v_0 qui correspondrait à un mouvement révolutif si les possibilités de glissement et de décollement étaient exclues.
 On posera dans la suite $u = \frac{v_0}{v_m}$. Dans le cas d'un mouvement oscillatoire, exprimer l'amplitude α des oscillations en fonction de u .
11. Le glissement étant supposé exclu, montrer que le décollement peut se produire au-delà d'un angle $\theta_d < \alpha$ donnée par $\cos\theta_d = \frac{4}{7}\cos\alpha$. En déduire l'intervalle de l'angle α .
12. Après avoir donné les lois de Coulomb pour le frottement de glissement, discuter des possibilités de glissement.
13. On suppose maintenant que le cylindre creux n'est pas immobile ; On lui impose un mouvement sinusoïdal de translation de direction horizontale, l'abscisse de O_0 variant suivant la loi : $y(O_0) = A \cos(\omega t)$.
 En se limitant au cas où θ est petit, établir une équation différentielle du second ordre vérifiée par $\theta(t)$ et utiliser celle-ci pour décrire les circonstances possibles.