

DS4 : Mécanique des solides : Oscillations d'un pendule pesant
Durée : 2 H

Le problème étudie l'évolution du comportement d'un pendule pesant en fonction de son énergie E .

1 Pendule non linéaire sans frottement

On considère le pendule pesant constitué d'une barre mobile de masse m de longueur l (figure 1), tournant sans frottement autour de l'axe Oy , fixe dans le référentiel galiléen $R(O, x, y, z)$. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ et l'on donne le moment d'inertie J de la tige par rapport à Oy : $J = \frac{1}{3}ml^2$.

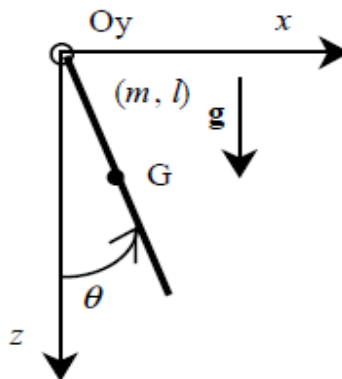


FIGURE 1 – pendule pesant

1. Déterminer l'énergie cinétique du pendule.
2. Déterminer l'énergie potentielle du pendule $E_p(\theta)$.
3. On note E l'énergie mécanique du pendule, prise nulle à l'équilibre lorsque $\theta = 0$. Montrer que l'énergie mécanique E se conserve. En déduire l'intégrale première relation qui donne $\dot{\theta}$ en fonction de θ et des paramètres du problème.
4. En déduire l'équation différentielle du mouvement du deuxième ordre vérifiée par $\theta(t)$.
5. Tracer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ en fonction de θ . En déduire la nature du mouvement suivant la valeur de E .
6. Enoncer le théorème du moment cinétique. L'appliquer au pendule pour redémontrer l'équation différentielle du mouvement.
7. On suppose que $E \ll E_{pmax} = mgl$. Représenter, pour diverses valeurs de $E \ll E_{pmax}$, l'allure des trajectoires possibles dans l'espace des phases $(\theta, \dot{\theta})$. Montrer que l'on obtient des orbites fermées dont on précisera le sens de parcours.
8. Déduire de ces résultats que le point M_0 de coordonnées $(0,0)$ dans l'espace des phases définit une position d'équilibre stable et montrer que, pour $0 < E \ll E_{pmax}$, le pendule est un oscillateur harmonique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

9. Montrer que, pour $E < E_{pmax}$, on obtient un mouvement périodique de période $T(E) = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0(E)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{pmax}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$. où $E = E_{pmax} \sin^2(\frac{\theta_0}{2})$. Retrouver l'expression de T_0 .
10. On suppose dans cette question que $E > E_{pmax}$. Représenter dans l'espace des phases les trajectoires possibles pour diverses valeurs de $E > E_{pmax}$. Donner un exemple de conditions initiales conduisant à cette situation et préciser alors le sens de parcours de l'orbite obtenue dans l'espace des phases.
11. Comment reconnaît-on, dans l'espace des phases, les positions d'équilibre, stable ou instable ?

2 Pendule non linéaire avec frottement fluide

12. On reprend le dispositif étudié en I), mais en tenant compte désormais d'un frottement fluide, caractérisé par son moment par rapport à Oy : $\Gamma_{fluide} = -f \frac{d\theta}{dt}$ ($f > 0$). Dans toute le reste du problème, on suppose que l'angle θ reste petit devant π .
13. Expliquer en quoi le terme $\Gamma_{fluide} = -f \frac{d\theta}{dt}$ caractérise effectivement un frottement. Citer d'autres situations physiques où l'on rencontre un frottement analogue.
14. Établir et commenter la nouvelle équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par $\theta(t)$.
15. Discuter la nature du mouvement du pendule.
16. Montrer que l'énergie $E(t)$ décroît à partir de l'énergie initiale $E(0)$ et représenter sans calcul, l'allure du portrait de phase en régimes amorti, critique et pseudo-périodique. Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires de phase. Ce diagramme est caractéristique de l'évolution du système représenté dans l'espace de phase.