

Corrigé – TD Mécanique des solides

Exercice 1 – Chute d'une tige sur le sol

On note α l'angle de la tige avec l'horizontale. Le contact en A est sans frottement : les seules actions extérieures sont le poids $m\vec{g}$ et la réaction verticale du sol. Il n'existe donc aucune force extérieure horizontale.

1. Trajectoire de G . Le théorème de la résultante dynamique projeté sur Ox donne

$$m\ddot{x}_G = 0.$$

La tige partant sans vitesse, $\dot{x}_G = 0$, donc $x_G = \text{cste}$. Le centre de masse décrit une **droite verticale**. Comme $AG = b$,

$$y_G = b \sin \alpha, \quad \dot{y}_G = b \cos \alpha \dot{\alpha}.$$

2. Énergie. La vitesse de G est verticale : $V_G = b \cos \alpha |\dot{\alpha}|$. Avec $J_G = \frac{1}{3}mb^2$,

$$E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}mb^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \right) \dot{\alpha}^2.$$

En prenant le sol comme origine de l'énergie potentielle,

$$E_p = mgb \sin \alpha.$$

La réaction en A ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve. Initialement $\alpha = \pi/2$ et $\dot{\alpha} = 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2}mb^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{3} \right) \dot{\alpha}^2 + mgb \sin \alpha = mgb.}$$

3. Vitesse au choc. Lorsque la tige devient horizontale, $\alpha = 0$:

$$\frac{1}{2}mb^2 \left(1 + \frac{1}{3} \right) \dot{\alpha}^2 = mgb \Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2b}.$$

Or $V_G = b|\dot{\alpha}|$ à cet instant.

Résultat

$$\boxed{\vec{V}_G = -\sqrt{\frac{3gb}{2}} \vec{e}_y}$$

Exercice 2 – Barre appuyée contre un mur

Le centre G a pour coordonnées $x_G = b \cos \alpha$, $y_G = b \sin \alpha$. On a $V_G = b|\dot{\alpha}|$ et $J_G = \frac{1}{3}mb^2$.

1. Intégrale première.

$$E_c = \frac{1}{2}mb^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2, \quad E_p = mgb \sin \alpha.$$

Les réactions ne travaillent pas. Avec $\dot{\alpha}(0) = 0$ et $\alpha(0) = \alpha_0$:

$$\boxed{\frac{2}{3}mb^2\dot{\alpha}^2 + mgb \sin \alpha = mgb \sin \alpha_0}$$

soit

$$\boxed{\dot{\alpha}^2 = \frac{3g}{2b}(\sin \alpha_0 - \sin \alpha).}$$

En dérivant :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4b} \cos \alpha.$$

2. Réaction du mur. La seule force horizontale est $\vec{R}_B = R_B \vec{e}_x$. Donc

$$R_B = m\ddot{x}_G = -mb(\cos \alpha \dot{\alpha}^2 + \sin \alpha \ddot{\alpha}).$$

En substituant les relations précédentes :

$$R_B = \frac{3mg}{4} \cos \alpha (3 \sin \alpha - 2 \sin \alpha_0).$$

Le contact avec le mur cesse lorsque $R_B = 0$ (avant la position horizontale), donc

Résultat

$$\sin \alpha_m = \frac{2}{3} \sin \alpha_0.$$

Exercice 3 – Oscillations d'un demi-disque

On utilise $CG = b = \frac{4R}{3\pi}$ et $J_C = \frac{1}{2}mR^2$. Le roulement sans glissement impose, au signe près suivant la convention de la figure, $\dot{x} = -R\dot{\alpha}$.

Avec $\vec{CG} = b(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$, on obtient

$$V_G^2 = (R^2 + b^2 - 2Rb \cos \alpha) \dot{\alpha}^2.$$

Par Huygens, $J_G = J_C - mb^2$. Ainsi

$$E_c = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rb \cos \alpha\right) \dot{\alpha}^2.$$

Et

$$E_p = mg(R - b \cos \alpha).$$

La réaction au contact instantané ne travaille pas :

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rb \cos \alpha\right) \dot{\alpha}^2 + mg(R - b \cos \alpha) = \text{cste.}$$

Avec le lâcher sans vitesse à α_0 , la constante vaut $mg(R - b \cos \alpha_0)$.

Pour $|\alpha| \ll 1$, le coefficient cinétique est pris à $\alpha = 0$ et $\sin \alpha \simeq \alpha$. L'équation linéarisée est

$$\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rb\right) \ddot{\alpha} + gb \alpha = 0.$$

Résultat

$$\omega_0^2 = \frac{gb}{\frac{3}{2}R^2 - 2Rb},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}R^2 - 2Rb}{gb}}.$$

Avec $b = \frac{4R}{3\pi}$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)}.$$

Exercice 4 – Mouvement d'un chasse-neige

On note T_1, N_1 les composantes de la réaction au contact I_1 de la roue et T_2, N_2 celles au patin I_2 . Les deux solides ont chacun la masse m ; la masse totale est $2m$.

Résultante dynamique de l'ensemble :

$$T_1 + T_2 = 2m\ddot{x}, \quad N_1 + N_2 = 2mg.$$

Le centre de masse de l'ensemble est le milieu de CA ; les moments des actions extérieures peuvent ensuite être écrits autour de ce point en utilisant $CA = 2R$ et $AI_2 = R$.

Roue seule, moment en C :

$$J_C \dot{\omega} = \Gamma - RT_1, \quad J_C = mR^2.$$

Le roulement sans glissement en I_1 donne

$$\ddot{x} = R\dot{\omega}$$

avec le signe adapté au sens positif choisi sur la figure.

Au contact I_2 , le patin glisse : la force tangentielle est de Coulomb,

$$|T_2| = fN_2$$

et son sens est opposé à la vitesse de glissement. Pour le mouvement vers $+x$, $T_2 = -fN_2$.

Les équations précédentes, complétées par l'équation du moment de l'ensemble, déterminent $\ddot{x}, T_1, N_1, N_2$. La réalisation physique exige simultanément

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0, \quad |T_1| \leq fN_1, \quad T_2 = -fN_2.$$

Remarque

L'énoncé fourni ne donne pas explicitement la position verticale du centre de masse de S_2 au-delà du schéma. On conserve donc ici le système d'équations exact et les conditions de contact, sans introduire une géométrie supplémentaire non indiquée dans le TD.

Exercice 5 – Barre sur un axe horizontal

On note $a = OC$ ($0 < a < b$). Tant qu'il n'y a pas glissement, le point O de la barre reste fixe : la barre tourne autour de O .

Le moment d'inertie autour de O vaut

$$J_O = J_C + ma^2 = \frac{1}{3}mb^2 + ma^2.$$

Si α est mesuré à partir de l'horizontale, le théorème du moment dynamique en O donne

$$J_O \ddot{\alpha} = mga \cos \alpha.$$

La conservation de l'énergie depuis $\alpha = 0, \dot{\alpha} = 0$, donne

$$\frac{1}{2} J_O \dot{\alpha}^2 = mga \sin \alpha.$$

L'accélération du centre C a une composante tangentielle $a\ddot{\alpha}$ et une composante normale $a\dot{\alpha}^2$. En projetant $m\vec{a}_C = \vec{P} + \vec{R}$, on obtient les composantes normale N et tangentielle F de la réaction en O . La condition d'adhérence est $|F| \leq fN$. Le glissement débute à l'égalité

Résultat

$$|F(\alpha_m)| = fN(\alpha_m).$$

avec $\dot{\alpha}^2 = 2mga \sin \alpha / J_O$ et $\ddot{\alpha} = mga \cos \alpha / J_O$ à substituer dans F, N .

Remarque

Le TD ne précise pas sur la figure le sens choisi pour α après le lâcher ; l'équation ci-dessus est indépendante de ce choix dès que les composantes sont prises en valeur absolue.

Exercice 6 – Cylindre sur un plan incliné

Pour un cylindre homogène, $J_C = \frac{1}{2}mR^2$. On choisit x vers le bas du plan.

Roulement sans glissement. Les équations sont

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F, \quad J_C \dot{\omega} = FR, \quad \ddot{x} = R\dot{\omega}.$$

D'où

$$F = \frac{1}{2}m\ddot{x}, \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad F = \frac{1}{3}mg \sin \alpha.$$

La réaction normale vaut $N = mg \cos \alpha$. L'adhérence est possible si $F \leq fN$:

Résultat

$$\tan \alpha \leq 3f.$$

Avec glissement. Si $\tan \alpha > 3f$, $F = fmg \cos \alpha$ et

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad \dot{\omega} = \frac{2fg \cos \alpha}{R}.$$

Bilan énergétique. Sans glissement, le frottement statique ne travaille pas :

$$mgx \sin \alpha = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2.$$

Avec glissement, le frottement dissipe de l'énergie :

$$\Delta E_m = W_f = -fmg \cos \alpha \int_0^t |v_{I/sol}| dt \leq 0.$$

Exercice 7 – Point matériel dans un tuyau roulant

Le tuyau roule sans glisser, donc sa vitesse angulaire est liée à $\dot{x}$ par $\Omega = -\dot{x}/R$. Pour le point P ,

$$x_P = x + R \sin \theta, \quad y_P = R - R \cos \theta.$$

Ainsi

$$V_P^2 = \dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + R^2\dot{\theta}^2.$$

L'énergie cinétique totale est

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}mV_P^2 = M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mV_P^2.$$

L'énergie potentielle variable est $mgR(1 - \cos \theta)$.

Comme x est une coordonnée cyclique,

$$(2M + m)\dot{x} + mR\dot{\theta} \cos \theta = \text{cste} = 0.$$

L'équation de θ issue de Lagrange est

$$R\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0.$$

Pour les petites oscillations, $\cos \theta \simeq 1$, $\sin \theta \simeq \theta$. La première équation donne

$$\ddot{x} = -\frac{mR}{2M + m}\ddot{\theta}.$$

Donc

$$R\left(1 - \frac{m}{2M + m}\right)\ddot{\theta} + g\theta = 0,$$

soit

Résultat

$$\omega_0^2 = \frac{g(2M + m)}{2MR}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{g(2M + m)}}.$$

Point solidaire du tuyau. Le système devient un solide composé; on applique le théorème de l'énergie ou du moment autour du point instantané de contact. Pour de petites oscillations autour de la position basse, l'inertie équivalente doit inclure MR^2 du tuyau et mR^2 du point relativement à C , ainsi que la translation imposée par le roulement.

Exercice 8 – Entraînement d'un cube par un cylindre

Pour le cylindre S_2 , les forces sont son poids $m\vec{g}$ et la tension verticale $\vec{T} = T\vec{e}_y$. Il n'existe aucune composante horizontale :

$$m\ddot{x}_C = 0.$$

Comme le système part sans vitesse horizontale, $x_C = \text{cste}$: le mouvement de C est vertical. Sur Oy ,

$$m\ddot{y}_C = T - mg.$$

Le moment de la tension par rapport à C vaut Ta , donc

$$J_C\ddot{\theta} = Ta, \quad J_C = \frac{1}{2}ma^2,$$

d'où

$$T = \frac{1}{2}ma\ddot{\theta}.$$

L'absence de glissement du fil sur le cylindre en A et l'inextensibilité imposent que la variation de longueur du brin vertical et celle du brin incliné se compensent avec le déroulement du fil. Avec les orientations de la figure :

$$v_t + v_C = a\dot{\theta}$$

(les signes changent ensemble si l'on inverse les orientations). En dérivant :

$$a_t + a_C = a\ddot{\theta}.$$

Pour le cube, projeté suivant la pente orientée vers la poulie :

$$Ma_t = T - Mg \sin \alpha.$$

En combinant ces quatre relations, on obtient les accélérations du cube et du cylindre ; leur signe change lorsque la composante $Mg \sin \alpha$ franchit la valeur imposée par le poids du cylindre et son inertie de rotation.

Exercice 9 – Déplacement d'un camion sur un sol horizontal

Chaque roue est de masse négligeable et tourne sans frottement autour de son axe. Le moment dynamique autour de son centre impose que le moment de la réaction tangentielle soit nul :

$$T_k = 0.$$

Les actions du sol sur le camion sont donc uniquement verticales.

Pour le camion complet, la projection horizontale du théorème de la résultante dynamique donne

$$(M + m)\ddot{x}_G = 0.$$

Le camion étant initialement immobile,

$$x_G = \text{cste.}$$

D'après la figure, $\overrightarrow{AB} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_{\text{benne}}$. Lorsque la benne passe de α à α_0 , le déplacement horizontal relatif de son centre de masse par rapport au tracteur est

$$\Delta(x_B - x_A) = b(\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Or

$$x_G = \frac{Mx_A + mx_B}{M + m} = \text{cste},$$

donc

Résultat

$$d = \Delta x_A = -\frac{m}{M + m} b(\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Le paramètre a disparaît car il est constant pendant le basculement.

Exercice 10 – Tiges articulées et guidées

La géométrie de la figure impose $A = (2a \sin \theta, 2a \cos \theta)$ (axe vertical orienté vers le bas) et, puisque B reste sur Ox , $B = (4a \sin \theta, 0)$. Les centres de masse des deux tiges sont

$$G_1 = (a \sin \theta, a \cos \theta), \quad G_2 = (3a \sin \theta, a \cos \theta).$$

Pour chaque tige, $J_G = \frac{1}{12}m(2a)^2 = \frac{1}{3}ma^2$. On obtient

$$V_{G_1}^2 = a^2\dot{\theta}^2, \quad V_{G_2}^2 = a^2(9\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2.$$

Les deux tiges ont des vitesses angulaires de même module $|\dot{\theta}|$. Ainsi

$$E_c = ma^2 \left(\frac{16}{3} - 4\sin^2 \theta \right) \dot{\theta}^2.$$

Avec l'axe vertical orienté vers le bas, l'énergie potentielle vaut, à une constante près,

$$E_p = -2mga \cos \theta.$$

L'équation de Lagrange conduit à

$$\left(\frac{16}{3} - 4 \sin^2 \theta\right) \ddot{\theta} - 4 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}^2 + \frac{g}{a} \sin \theta = 0.$$

Pour $|\theta| \ll 1$:

$$\frac{16}{3} \ddot{\theta} + \frac{g}{a} \theta = 0.$$

Résultat

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{16a}}.$$

Exercice 11 – Oscillateur de Timochenko

On note N_1, N_2 les réactions normales des rouleaux gauche et droit. La planche reste horizontale :

$$N_1 + N_2 = mg.$$

En prenant les moments autour du centre G de la planche, situé à l'abscisse x par rapport à O , et les rouleaux aux abscisses $-l/2$ et $+l/2$:

$$N_1 \left(x + \frac{l}{2}\right) = N_2 \left(\frac{l}{2} - x\right).$$

D'où

$$N_1 = mg \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right), \quad N_2 = mg \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l}\right).$$

Les rouleaux tournent en sens opposés et entraînent la planche vers O . Tant que la vitesse de la planche reste inférieure à la vitesse périphérique $R\omega$, les frottements valent en module fN_i . Ainsi

$$m\ddot{x} = fN_1 - fN_2 = -\frac{2fmg}{l}x.$$

Donc

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2fg}{l}}.$$

La période est

Résultat

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2fg}}.$$

Avec $f = 0,5$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$, $l = 5 \text{ m}$:

$$T \simeq 4,49 \text{ s}.$$

Les frottements injectent de l'énergie mécanique dans la planche lorsqu'ils s'opposent au glissement relatif avec les rouleaux : leur puissance totale moyenne sur un cycle est positive, l'énergie étant fournie par les moteurs qui maintiennent ω constante.

Pour que le régime harmonique précédent reste valide, il faut que la vitesse maximale de la planche ne dépasse pas $R\omega$:

$$\omega_0 |x_0| \leq R\omega.$$

Donc

Résultat

$$|x_0| \leq x_{\max} = \frac{R\omega}{\omega_0} = R\omega \sqrt{\frac{l}{2fg}}.$$

Numériquement, avec $R\omega = 1 \text{ m s}^{-1}$:

$$x_{\max} \simeq 0,714 \text{ m}.$$

Si $|x_0| > x_{\max}$, la planche traverse une phase où le signe d'un frottement change lorsque sa vitesse dépasse la vitesse périphérique du rouleau correspondant : le mouvement n'est alors plus harmonique jusqu'à ce que $|\dot{x}|$ redescende sous $R\omega$.

Remarque

Ce corrigé suit les données et la géométrie visibles dans le TD fourni. Pour les exercices 4, 5, 7(2) et 8, certaines conventions géométriques ou de signe ne sont pas complètement explicitées par le texte source ; les équations sûres sont données et les points dépendant d'une convention non fournie sont signalés plutôt que complétés arbitrairement.