

Équations de Maxwell et énergie électromagnétique

1 Équations de Maxwell dans le vide

Les équations de Maxwell constituent les lois fondamentales de l'électromagnétisme classique. Elles relient les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ aux sources que sont la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant $\vec{j}$.

1.1 Formulations locales

Résultat important

Équation de Maxwell–Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Équation de Maxwell–Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Conservation du flux magnétique :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell–Ampere :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

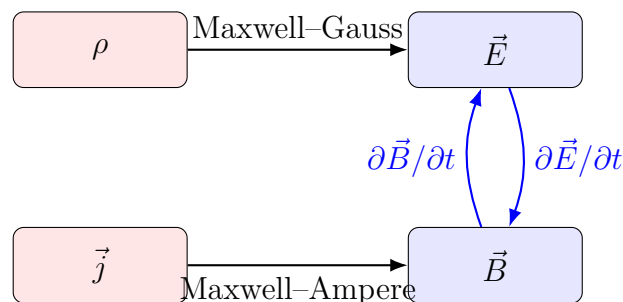


FIGURE 1 – Les sources et le couplage dynamique des champs électrique et magnétique.

Interprétation physique

Maxwell–Gauss exprime que les charges électriques sont des sources du champ électrique. L'équation $\text{div } \vec{B} = 0$ exprime l'absence de sources magnétiques isolées dans le modèle classique. Les deux équations rotationnelles montrent surtout qu'un champ variable peut engen-

drer l'autre : un champ magnétique variable crée un champ électrique tourbillonnaire et un champ électrique variable contribue à la création du champ magnétique.

1.2 Formulations intégrales

Pour une surface fermée $\mathcal{S}$ bordant un volume $\mathcal{V}$:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

et :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Pour un contour fermé $\mathcal{C}$ s'appuyant sur une surface $\mathcal{S}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

et :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Interprétation physique

Les formes intégrales décrivent des propriétés globales : flux à travers une surface et circulation le long d'un contour. Les formes locales décrivent ce qui se passe au voisinage immédiat de chaque point de l'espace.

2 Référentiel et propagation des interactions

Les équations de Maxwell sont compatibles avec une vitesse de propagation finie des perturbations électromagnétiques :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Une modification d'une source ne peut donc pas être ressentie instantanément à une distance L .

Le temps de propagation est de l'ordre de :

$$\tau_{\text{prop}} \simeq \frac{L}{c}$$

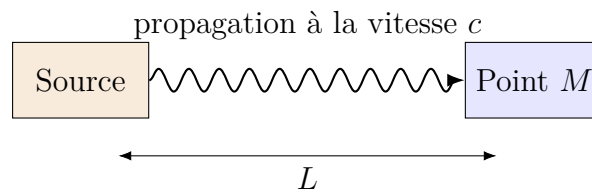


FIGURE 2 – Temps de propagation entre une source et un point d'observation.

Interprétation physique

En électromagnétisme général, la notion d'action instantanée à distance n'est plus correcte. Le champ transporte l'information de proche en proche à une vitesse finie. C'est précisément cette idée qui conduit aux ondes électromagnétiques.

3 Approximation des régimes quasi-permanents (ARQP/ARQS)

3.1 Condition de validité

Soit T le temps caractéristique de variation des grandeurs électriques et magnétiques et L la taille caractéristique du dispositif.

L'approximation quasi-stationnaire est pertinente lorsque :

$$\frac{L}{c} \ll T$$

ou, pour une excitation sinusoïdale de pulsation ω :

$$\frac{\omega L}{c} \ll 1$$

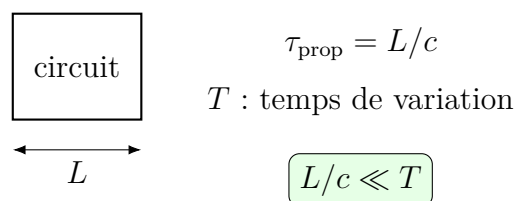


FIGURE 3 – Comparaison entre temps de propagation et temps d'évolution du système.

Interprétation physique

Lorsque la propagation est beaucoup plus rapide que l'évolution du système, on peut traiter le circuit comme si chaque point réagissait presque instantanément. C'est ce qui permet de conserver une description par circuits concentrés.

3.2 Équations de Maxwell dans l'ARQS

Dans l'approximation magnétique usuelle des régimes quasi-stationnaires, le courant de déplacement est négligé devant le courant de conduction :

$$\varepsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}|$$

L'équation de Maxwell–Ampere devient :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Les autres équations conservent la forme :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Interprétation physique

On conserve donc les phénomènes d'induction liés à $\partial \vec{B} / \partial t$, tout en négligeant l'effet magnétique direct du terme de courant de déplacement.

3.3 Conservation du courant et loi des nœuds

Prenons la divergence de :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Comme :

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = 0,$$

on obtient :

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

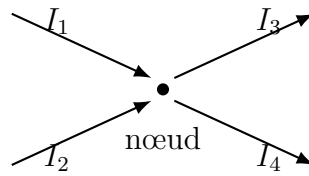


FIGURE 4 – Conservation du courant à un nœud d'un circuit.

En intégrant sur un petit volume entourant le nœud :

$$\sum I_{\text{entrants}} = \sum I_{\text{sortants}}$$

Interprétation physique

La loi des nœuds n'est donc pas une règle indépendante de l'électromagnétisme : dans l'ARQS, elle résulte de la conservation locale du courant.

4 Limite statique des équations de Maxwell

En régime strictement stationnaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

On retrouve les équations locales des champs statiques.

Électrostatique	Magnétostatique
$\text{div } \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Interprétation physique

Les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique apparaissent comme des cas particuliers des équations générales de Maxwell lorsque les grandeurs ne dépendent plus du temps.

5 Relations de passage à une interface

On considère une interface séparant les milieux 1 et 2. Le vecteur $\vec{n}_{12}$ est orienté du milieu 1 vers le milieu 2.

On note σ_s la densité surfacique de charge et $\vec{K}$ la densité surfacique de courant.

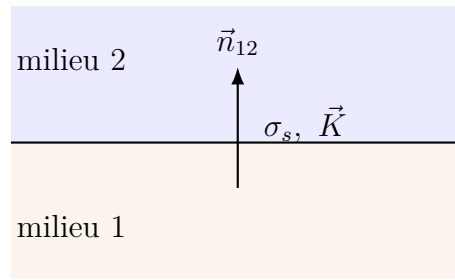


FIGURE 5 – Interface portant éventuellement une charge et un courant surfaciques.

Les relations de passage admises sont :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K}$$

Interprétation physique

Une charge surfacique produit un saut de la composante normale de $\vec{E}$. Un courant surfacique produit un saut de la composante tangentielle de $\vec{B}$. En revanche, la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ restent continues dans le cadre considéré.

6 Force électromagnétique volumique

La densité volumique de force électromagnétique exercée sur la matière est :

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

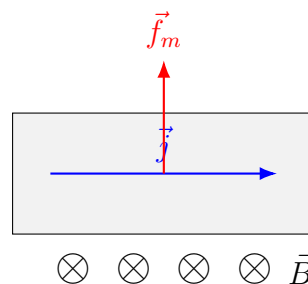


FIGURE 6 – Action magnétique volumique sur une distribution de courant.

La puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charge est :

$$p_{\text{em} \rightarrow \text{mat}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Interprétation physique

La partie magnétique de la force est perpendiculaire au mouvement des charges et ne fournit pas directement de travail. Le transfert local d'énergie du champ vers la matière est porté par le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$.

7 Conducteur ohmique et effet Joule

La forme locale de la loi d'Ohm est phénoménologique :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où γ est la conductivité électrique.

La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut :

$$p_J = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Donc :

$$p_J = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}$$

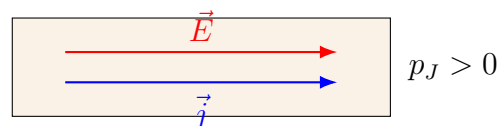


FIGURE 7 – Dans un conducteur ohmique, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires.

Interprétation physique

Dans un conducteur ohmique, l'énergie électromagnétique reçue par les charges est irréversiblement transformée en agitation thermique. La densité de puissance Joule est donc toujours positive.

8 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Dans le vide, la densité volumique d'énergie du champ électromagnétique est :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On distingue :

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

et :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

8.1 Exemple : condensateur plan

Entre les armatures d'un condensateur plan idéal, le champ est approximativement uniforme.

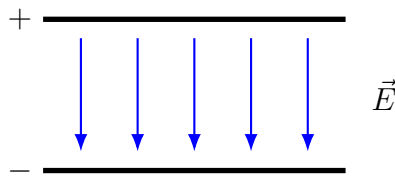


FIGURE 8 – Énergie électrique stockée dans le champ d'un condensateur plan.

La densité d'énergie vaut :

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Interprétation physique

L'énergie du condensateur n'est pas seulement "dans les plaques" : elle est localisée dans la région de l'espace où existe le champ électrique.

8.2 Exemple : solénoïde infini

Dans un solénoïde idéal long :

$$B \simeq \mu_0 n I.$$

La densité d'énergie magnétique est :

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

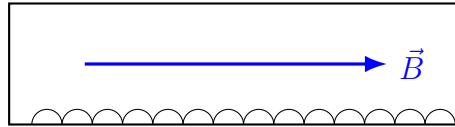


FIGURE 9 – Énergie magnétique stockée dans le champ d'un solénoïde.

Interprétation physique

Comme pour le condensateur, l'énergie de la bobine peut être interprétée comme une énergie stockée dans le champ magnétique créé dans l'espace.

9 Vecteur de Poynting

On définit le vecteur de Poynting :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Son unité est :

$$[\vec{S}] = \text{W m}^{-2}.$$

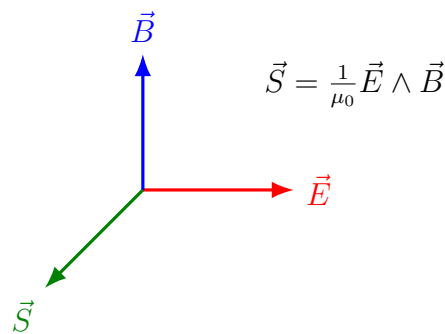


FIGURE 10 – Direction du transport d'énergie électromagnétique.

Interprétation physique

Le vecteur de Poynting décrit le transport local d'énergie électromagnétique. Sa direction indique le sens du transport et sa norme représente une puissance traversant une unité de surface.

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface $\mathcal{S}$ est une puissance :

$$P_{\text{tr}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{S} \cdot d\vec{S}$$

Quelques ordres de grandeur indicatifs :

rayonnement solaire au voisinage de la Terre $\sim 10^3 \text{ W m}^{-2}$,

alors que des faisceaux laser focalisés peuvent atteindre des flux énergétiques très supérieurs.

10 Bilan local d'énergie : théorème de Poynting

On utilise l'identité vectorielle :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}.$$

En utilisant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

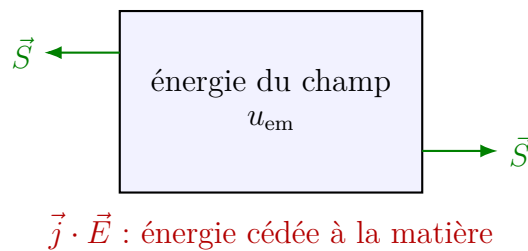


FIGURE 11 – Lecture locale du bilan d'énergie électromagnétique.

Interprétation physique

Le terme $\partial u_{\text{em}}/\partial t$ décrit l'accumulation locale d'énergie du champ. Le terme $\text{div } \vec{S}$ décrit ce qui quitte localement la région par transport électromagnétique. Le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$ représente l'énergie cédée par le champ à la matière.

11 Bilan intégral d'énergie

Intégrons sur un volume fixe $\mathcal{V}$ bordé par la surface fermée $\mathcal{S}$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{em}} d\tau + \oiint_{\mathcal{S}} \vec{S} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

On peut aussi l'écrire :

$$-\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = P_{\text{sortante}} + P_{\text{cédée à la matière}}$$

avec les conventions de signe appropriées.

Interprétation physique

La diminution de l'énergie électromagnétique stockée dans un volume se répartit entre l'énergie qui traverse sa frontière et l'énergie transmise à la matière présente dans ce volume. C'est une loi de conservation de l'énergie.

12 Bilan du chapitre

Résultat important

Équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ARQS :

$$\operatorname{rot} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Énergie :

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Poynting :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Bilan local :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

13 Exercices

Exercice 1 – Maxwell et conservation de la charge

A partir de l'équation de Maxwell–Ampere, montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Interpréter physiquement cette relation.

Exercice 2 – Validité de l'ARQS

Un circuit de taille caractéristique $L = 1 \text{ m}$ fonctionne à la fréquence $f = 1 \text{ kHz}$.

1. Calculer L/c .
2. Calculer la période T .
3. Vérifier si la condition $L/c \ll T$ est satisfaite.

Exercice 3 – Relation de passage

Une surface porte une densité surfacique de charge uniforme σ_s . Le champ électrique juste sous la surface vaut $\vec{E}_1$. Donner la relation permettant de calculer la composante normale de $\vec{E}_2$ juste au-dessus de la surface.

Exercice 4 – Effet Joule local

Un conducteur ohmique de conductivité $\gamma = 5,8 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$ est soumis à un champ uniforme $E = 2,0 \times 10^{-3} \text{ V m}^{-1}$.

1. Calculer j .
2. Calculer la puissance volumique Joule.

Exercice 5 – Énergie d'un condensateur plan

Un condensateur plan possède une surface S , une distance entre plaques d et un champ uniforme E .

1. Donner la densité d'énergie électrique.
2. En déduire l'énergie totale stockée entre les plaques.
3. Retrouver l'expression $U = \frac{1}{2}CU^2$ en utilisant $C = \epsilon_0 S/d$ et $E = U/d$.

Exercice 6 – Flux de Poynting

Un champ électromagnétique présente localement :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 \vec{e}_y.$$

1. Déterminer la direction de $\vec{S}$.
2. Calculer sa norme.
3. Interpréter physiquement le résultat.

14 Corrigé des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Partons de :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Prenons la divergence :

$$0 = \mu_0 \text{div } \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}).$$

Avec Maxwell–Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

on obtient :

$$0 = \mu_0 \text{div } \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$$

Cette relation exprime la conservation locale de la charge électrique.

Corrigé de l'exercice 2

$$\frac{L}{c} = \frac{1}{3,0 \times 10^8} \simeq 3,3 \times 10^{-9} \text{ s.}$$

La période vaut :

$$T = \frac{1}{f} = 10^{-3} \text{ s.}$$

Donc :

$$\frac{L/c}{T} \simeq 3,3 \times 10^{-6} \ll 1.$$

Ainsi :

l'ARQS est largement valable dans cet exemple.

Corrigé de l'exercice 3

La relation de passage sur la composante normale du champ électrique est :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$

d'où :

$$E_{2n} = E_{1n} + \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$

avec la convention d'orientation choisie.

Corrigé de l'exercice 4

La loi d'Ohm locale donne :

$$j = \gamma E.$$

Donc :

$$j = 5,8 \times 10^7 \times 2,0 \times 10^{-3} = 1,16 \times 10^5 \text{ A m}^{-2}.$$

Ainsi :

$$j = 1,16 \times 10^5 \text{ A m}^{-2}$$

La puissance volumique vaut :

$$p_J = \gamma E^2.$$

Donc :

$$p_J = 5,8 \times 10^7 (2,0 \times 10^{-3})^2 = 232 \text{ W m}^{-3}.$$

$$p_J = 232 \text{ W m}^{-3}$$

Corrigé de l'exercice 5

La densité d'énergie est :

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

Le volume entre les plaques vaut :

$$V = Sd.$$

Donc :

$$U_{\text{em}} = u_E V = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Sd.$$

Avec :

$$E = \frac{U}{d},$$

on obtient :

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} Sd = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} U^2.$$

Or :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Donc :

$$U_{\text{em}} = \frac{1}{2} C U^2$$

Corrigé de l'exercice 6

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}.$$

Avec :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z,$$

on obtient :

$$\vec{S} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \vec{e}_z$$

Sa norme vaut :

$$S = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}$$

L'énergie électromagnétique est donc transportée localement dans le sens positif de l'axe Oz .