

Équations locales de l'électrostatique

1 Introduction

En électrostatique, on s'intéresse à des distributions de charges électriques indépendantes du temps et au champ électrique qu'elles créent.

Les lois de l'électrostatique peuvent être écrites sous deux formes.

La première est une **formulation globale**, obtenue à l'aide d'intégrales sur des contours ou des surfaces.

Par exemple :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

et :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

La seconde est une **formulation locale** :

Elle décrit directement les propriétés du champ en chaque point de l'espace.

Elle fait intervenir quatre opérateurs mathématiques fondamentaux :

grad,	div,	rot,	Δ
-------	------	------	----------

L'objectif de ce chapitre est double :

- donner une interprétation physique simple de ces opérateurs ;
- établir les équations locales fondamentales de l'électrostatique.

2 Le gradient

2.1 Champ scalaire

Un champ scalaire associe à chaque point de l'espace une valeur numérique.

Exemples :

- température $T(x, y, z)$;
- pression $P(x, y, z)$;
- altitude $h(x, y, z)$;
- potentiel électrostatique $V(x, y, z)$.

Définition

Pour un champ scalaire $f(x, y, z)$, le gradient est défini par :

$$\vec{grad} f = \vec{\nabla} f$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Le gradient d'un scalaire est donc un **vecteur**.

2.2 Interprétation physique du gradient

Interprétation physique

Le vecteur :

$$\vec{\nabla} f$$

est orienté dans la direction où f augmente le plus rapidement.
 Sa norme mesure la rapidité de cette variation.

$$\vec{\text{grad}} f \longrightarrow \text{direction de croissance maximale de } f$$

Une image simple consiste à penser à une montagne.
 Si $h(x, y)$ représente l'altitude, alors :

$$\vec{\nabla} h$$

indique la direction dans laquelle la pente monte le plus rapidement.

2.3 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est définie par :

$$V = \text{constante.}$$

Le gradient est perpendiculaire à cette surface :

$$\vec{\nabla} V \perp \text{surface équipotentielle}$$

3 Relation entre champ électrique et potentiel

En électrostatique :

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

ou encore :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Le signe négatif signifie que le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.

Résultat important

Le champ électrostatique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles et dirigé des potentiels élevés vers les potentiels faibles.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Exemple

Supposons :

$$V(x) = V_0 - ax, \quad a > 0.$$

Alors :

$$\frac{dV}{dx} = -a.$$

Donc :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x = a\vec{e}_x.$$

Le potentiel diminue dans le sens $+x$, tandis que le champ est dirigé selon $+\vec{e}_x$.

4 La divergence

Définition

Pour un champ vectoriel :

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z,$$

la divergence est :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

avec :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un **scalaire**.

4.1 Interprétation physique

Interprétation physique

La divergence mesure localement le caractère source ou puits d'un champ.

$$\operatorname{div} \vec{A} > 0 \Rightarrow \text{source locale}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} < 0 \Rightarrow \text{puits local}$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \text{ni source ni puits}$$

On peut imaginer un petit volume placé dans un écoulement.

Si plus de fluide sort du volume qu'il n'en entre, la divergence est positive.

Si plus de fluide entre qu'il n'en sort, elle est négative.

5 Divergence du champ électrique

La forme locale du théorème de Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ou :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

où ρ désigne la densité volumique de charge.

5.1 Interprétation physique

Si :

$$\rho > 0,$$

alors :

$$\operatorname{div} \vec{E} > 0.$$

Les charges positives sont donc des sources du champ électrique.

Si :

$$\rho < 0,$$

alors :

$$\operatorname{div} \vec{E} < 0.$$

Les charges négatives se comportent comme des puits du champ électrique.

Résultat important

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

signifie que les charges électriques sont les sources du champ électrique.

Remarque

Dans une région où :

$$\rho = 0,$$

on a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

Cela ne signifie pas que :

$$\vec{E} = \vec{0}.$$

Un champ électrique peut exister dans une région ne contenant aucune charge.

6 Le rotationnel

Définition

Pour un champ vectoriel $\vec{A}$, on définit :

$$\vec{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Le rotationnel est un **vecteur**.

6.1 Interprétation physique

Interprétation physique

Le rotationnel mesure le caractère tourbillonnaire local d'un champ.

On peut imaginer une petite roue à ailettes plongée dans un écoulement.

Si la roue tourne sur elle-même, le champ possède localement un rotationnel non nul.

$$\vec{rot} \vec{A} \longrightarrow \text{tendance locale à la rotation}$$

7 Rotationnel du champ électrostatique

En électrostatique :

$$\vec{r} \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

ou :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Cette relation traduit le fait que le champ électrostatique n'a pas de caractère tourbillonnaire.

7.1 Conséquence sur la circulation

Pour tout contour fermé $\mathcal{C}$:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Le champ électrostatique est donc un **champ conservatif**.

7.2 Lien avec le potentiel

Comme :

$$\vec{r} \text{rot} \vec{E} = \vec{0},$$

il existe un potentiel scalaire V tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

dans un domaine approprié.

Résultat important

Les deux relations suivantes sont étroitement liées :

$$\vec{r} \text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

et :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

8 Le laplacien

Définition

Pour un champ scalaire f :

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$$

soit :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

8.1 Interprétation physique

Interprétation physique

Le laplacien mesure la manière dont la valeur d'un champ scalaire en un point se compare aux valeurs situées autour de ce point.

On peut retenir :

$$\Delta f > 0 \Rightarrow \text{tendance locale à former un creux}$$

$$\Delta f < 0 \Rightarrow \text{tendance locale à former une bosse}$$

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \text{équilibre local avec le voisinage}$$

8.2 Cas à une dimension

En une dimension :

$$\Delta f \longrightarrow \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Pour :

$$f(x) = x^2,$$

on a :

$$f''(x) = 2 > 0.$$

La courbe est tournée vers le haut :

∪

Pour :

$$f(x) = -x^2,$$

on obtient :

$$f''(x) = -2 < 0,$$

et la courbe est tournée vers le bas :

∩

9 Équation de Poisson

On part de :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

et :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Alors :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Or :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = \Delta V.$$

Donc :

$$-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Finalement :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Résultat important

L'équation :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

est appelée **équation de Poisson**.

Elle relie directement la courbure locale du potentiel à la densité de charge.

10 Équation de Laplace

Dans une région sans charge :

$$\rho = 0.$$

L'équation de Poisson devient :

$$\Delta V = 0$$

C'est l'**équation de Laplace**.

En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Interprétation physique

Dans une région sans charge, le potentiel ne possède pas de bosse ou de creux créé localement par une charge.

Sa valeur est déterminée par son environnement et par les conditions imposées aux frontières.

11 Les équations locales de l'électrostatique

Les deux équations fondamentales sont :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

La première renseigne sur les **sources** du champ.

La seconde indique que le champ électrostatique est **non tourbillonnaire**.

12 Synthèse des opérateurs

Opérateur	Agit sur	Donne	Interprétation
$\vec{grad}f$	scalaire	vecteur	direction de croissance maximale
$\operatorname{div} \vec{A}$	vecteur	scalaire	caractère source ou puits local
$\vec{rot} \vec{A}$	vecteur	vecteur	caractère tourbillonnaire local
Δf	scalaire	scalaire	courbure locale, comparaison avec le voisinage

Pour l'électrostatique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et dans une région vide :

$$\Delta V = 0$$

13 Compléments sur les équations de Poisson et de Laplace

13.1 Solution de l'équation de Poisson

Dans le vide, le potentiel électrostatique créé par une distribution volumique de charge $\rho(\vec{r}')$ peut s'écrire :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{Distribution finie de charge}} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau'$$

Cette expression constitue une solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

sous réserve de conditions de validité adaptées.

Remarque

Cette expression est notamment adaptée à une distribution de charges localisée dans l'espace, avec le choix de référence :

$$V(\infty) = 0.$$

Dans un domaine limité par des conducteurs ou par des frontières imposées, il faut résoudre directement l'équation de Poisson ou de Laplace avec les conditions aux limites appropriées.

13.2 Non-unicité du potentiel électrostatique

Le champ électrique est relié au potentiel par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V.$$

Si l'on remplace V par :

$$V' = V + C,$$

où C est une constante, alors :

$$\vec{\nabla}V' = \vec{\nabla}(V + C) = \vec{\nabla}V.$$

Ainsi :

$$-\vec{\nabla}V' = -\vec{\nabla}V.$$

Le champ électrique reste donc inchangé.

Résultat important

Le potentiel électrostatique est défini à une constante additive près :

$$V' = V + C$$

Il faut donc choisir une référence de potentiel, par exemple :

$$V(\infty) = 0.$$

13.3 Résolution numérique de l'équation de Laplace

Considérons un problème bidimensionnel dans une région ne contenant aucune charge.
Le potentiel vérifie :

$$\Delta V = 0$$

soit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

On discrétise l'espace à l'aide d'un maillage carré de pas h .
Au point (i, j) :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \simeq \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2}$$

et :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \simeq \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{h^2}.$$

L'équation de Laplace devient alors :

$$V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j} = 0.$$

On obtient :

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1})$$

Interprétation physique

Dans une région sans charge, le potentiel en un point est égal, dans cette approximation numérique, à la moyenne des potentiels de ses quatre voisins.
Cette propriété permet de déterminer numériquement le potentiel lorsque les conditions aux limites sont fixées.

Principe de la méthode itérative

La méthode consiste à :

1. fixer les valeurs du potentiel sur les frontières ;
2. attribuer une valeur initiale aux points intérieurs ;
3. remplacer chaque valeur intérieure par la moyenne des quatre voisins ;
4. répéter l'opération jusqu'à convergence.

On peut écrire :

$$V_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(V_{i+1,j}^{(n)} + V_{i-1,j}^{(n)} + V_{i,j+1}^{(n)} + V_{i,j-1}^{(n)} \right)$$

La solution est considérée comme convergée lorsque les variations entre deux itérations successives deviennent suffisamment faibles.

13.4 Analogie avec la gravitation

L'électrostatique et la gravitation possèdent une structure mathématique très semblable.

On introduit le potentiel gravitationnel Φ tel que :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$$

où $\vec{g}$ désigne le champ gravitationnel.

La forme locale de la loi de Gauss en gravitation s'écrit :

$$\text{div } \vec{g} = -4\pi G\rho_m$$

où :

- G est la constante de gravitation universelle ;
- ρ_m est la masse volumique.

Comme :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi,$$

on obtient :

$$-\Delta\Phi = -4\pi G\rho_m.$$

Donc :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho_m$$

Il s'agit de l'équation de Poisson gravitationnelle.

Dans une région vide de matière :

$$\rho_m = 0,$$

et l'équation devient :

$$\Delta\Phi = 0.$$

Remarque

L'analogie entre électrostatique et gravitation est très forte du point de vue mathématique. Cependant, les masses gravitationnelles sont toujours positives, tandis que les charges électriques peuvent être positives ou négatives.

14 Application de fin de chapitre : diode à vide

Étude d'une diode à vide

Application inspirée d'un problème de concours Mines-Ponts MP

Énoncé

Énoncé

On étudie une diode à vide constituée de deux électrodes métalliques planes, parallèles et de grande surface S , séparées d'une distance d .

La cathode C , située dans le plan $x = 0$, est portée au potentiel nul :

$$V(0) = 0.$$

Elle est chauffée et émet des électrons de masse m_e et de charge :

$$q = -e.$$

L'anode A , située dans le plan $x = d$, est portée au potentiel positif :

$$V(d) = U, \quad U > 0.$$

Les dimensions transversales des électrodes sont supposées très grandes devant d , de sorte que les effets de bord sont négligés.

Le problème est alors considéré comme unidimensionnel.

Entre la cathode et l'anode, on note :

$$V(x)$$

le potentiel électrostatique,

$$\vec{E}(x)$$

le champ électrique,

$$\rho(x)$$

la densité volumique de charge électrique,

et

$$v(x)$$

la vitesse des électrons.

On suppose que les électrons quittent la cathode avec une vitesse initiale négligeable.

On note $J > 0$ la valeur absolue de la densité de courant transportée par les électrons.

On se place dans le régime limité par la charge d'espace, pour lequel :

$$E(0) = 0.$$

Données :

$$\varepsilon_0$$

permittivité du vide,

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}.$$

Questions

Question 1

Justifier que le potentiel ne dépend que de x :

$$V = V(x).$$

En déduire la forme du champ électrique.

Question 2

À partir de :

$$\vec{E} = -\text{grad } V,$$

montrer que :

$$\vec{E}(x) = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

Question 3

À partir de :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

montrer que :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Question 4

Établir l'équation :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

et préciser son nom.

Question 5

On suppose d'abord :

$$\rho = 0.$$

Déterminer $V(x)$ puis $\vec{E}(x)$.

Question 6

Dans le fonctionnement réel, l'espace contient des électrons.
 Déterminer le signe de ρ , puis celui de :

$$\frac{d^2V}{dx^2}.$$

Interpréter la courbure de $V(x)$.

Question 7

Montrer que l'énergie potentielle d'un électron est :

$$E_p = -eV.$$

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, établir :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}$$

Question 8

En notant $J > 0$ la valeur absolue de la densité de courant, montrer que :

$$\rho(x) = -\frac{J}{v(x)}$$

puis :

$$\rho(x) = -J\sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{V(x)}}$$

Question 9

Montrer que le potentiel vérifie :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Question 10

On pose :

$$K = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}.$$

Résoudre :

$$V'' = KV^{-1/2}$$

avec :

$$V(0) = 0, \quad E(0) = 0, \quad V(d) = U.$$

Montrer que :

$$V(x) = U \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}$$

Question 11

Déterminer le champ électrique et vérifier que :

$$E(0) = 0.$$

Question 12

Établir la loi de Child-Langmuir :

$$J = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{d^2}$$

et en déduire l'intensité I .

Question 13

Comparer le potentiel en absence et en présence de charge d'espace.
Expliquer pourquoi :

$$I \propto U^{3/2}.$$

Corrigé détaillé

Correction – Question 1

Les électrodes étant planes et très étendues dans les directions y et z , le système est invariant par translation suivant ces directions.

Le potentiel ne dépend donc que de x :

$$V = V(x)$$

Le champ est alors nécessairement dirigé selon Ox :

$$\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$$

Correction – Question 2

La relation générale est :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V.$$

Comme :

$$V = V(x),$$

on a :

$$\vec{\nabla}V = \frac{dV}{dx}\vec{e}_x.$$

Donc :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x$$

Correction – Question 3

Pour :

$$\vec{E} = E(x)\vec{e}_x,$$

la divergence vaut :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dx}.$$

L'équation locale de Maxwell-Gauss donne :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Donc :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Correction – Question 4

On a :

$$E = -\frac{dV}{dx}.$$

Donc :

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2V}{dx^2}.$$

Or :

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Il s'agit de l'équation de Poisson.

Correction – Question 5

Si :

$$\rho = 0,$$

alors :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0.$$

On obtient :

$$V(x) = Ax + B.$$

Avec :

$$V(0) = 0,$$

on trouve :

$$B = 0.$$

Avec :

$$V(d) = U,$$

on obtient :

$$A = \frac{U}{d}.$$

Donc :

$$V(x) = \frac{U}{d}x$$

et :

$$\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{e}_x$$

Le champ est uniforme.

Correction – Question 6

Les porteurs sont des électrons.

Donc :

$$\rho < 0$$

L'équation de Poisson donne :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ainsi :

$$\frac{d^2V}{dx^2} > 0$$

Le potentiel présente donc une courbure positive.

La courbe est localement de la forme :

∪

Correction – Question 7

L'énergie potentielle d'une charge q au potentiel V vaut :

$$E_p = qV.$$

Pour un électron :

$$q = -e.$$

Donc :

$$E_p = -eV$$

L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 - eV.$$

À la cathode :

$$v(0) \simeq 0, \quad V(0) = 0.$$

Donc :

$$E_m = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV.$$

Finalement :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}$$

Correction – Question 8

La relation générale est :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}.$$

La charge des électrons étant négative, $\vec{j}$ est opposé à leur vitesse.
 Si J désigne la norme de la densité de courant :

$$J = -\rho v.$$

Donc :

$$\rho = -\frac{J}{v}$$

Avec :

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}},$$

on obtient :

$$\rho = -J \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

Correction – Question 9

L'équation de Poisson est :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

En utilisant :

$$\rho = -J \sqrt{\frac{m_e}{2e}} \frac{1}{\sqrt{V}},$$

on obtient :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}} V^{-1/2}$$

Correction – Question 10

On pose :

$$K = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}.$$

L'équation devient :

$$V'' = KV^{-1/2}.$$

On multiplie par V' :

$$V''V' = KV^{-1/2}V'.$$

Or :

$$V''V' = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}(V')^2 \right].$$

Et :

$$V^{-1/2}V' = 2 \frac{d}{dx} \sqrt{V}.$$

Donc :

$$\frac{1}{2}(V')^2 = 2K\sqrt{V} + C.$$

Avec :

$$V(0) = 0$$

et :

$$E(0) = 0 \Rightarrow V'(0) = 0,$$

on obtient :

$$C = 0.$$

Donc :

$$(V')^2 = 4K\sqrt{V}.$$

Comme $V' > 0$:

$$V' = 2\sqrt{K} V^{1/4}.$$

On sépare les variables :

$$V^{-1/4}dV = 2\sqrt{K} dx.$$

En intégrant :

$$\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\sqrt{K} x.$$

Donc :

$$V^{3/4} = \frac{3}{2}\sqrt{K} x.$$

On en déduit :

$$V \propto x^{4/3}.$$

Avec :

$$V(d) = U,$$

on obtient :

$$V(x) = U \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}$$

Correction – Question 11

On dérive :

$$V(x) = U \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}.$$

Donc :

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4U}{3d} \left(\frac{x}{d} \right)^{1/3}.$$

Ainsi :

$$\vec{E}(x) = -\frac{4U}{3d} \left(\frac{x}{d} \right)^{1/3} \vec{e}_x$$

Pour :

$$x = 0,$$

on obtient :

$$\vec{E}(0) = \vec{0}$$

Correction – Question 12

On avait :

$$V^{3/4} = \frac{3}{2}\sqrt{K} x.$$

Pour :

$$x = d, \quad V = U,$$

on obtient :

$$U^{3/4} = \frac{3}{2} \sqrt{K} d.$$

Donc :

$$K = \frac{4}{9} \frac{U^{3/2}}{d^2}.$$

Or :

$$K = \frac{J}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}.$$

Finalement :

$$J = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{d^2}$$

Pour une surface S :

$$I = JS.$$

Donc :

$$I = \frac{4}{9} \varepsilon_0 S \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U^{3/2}}{d^2}$$

Correction – Question 13

Sans charge d'espace :

$$\rho = 0.$$

On obtient :

$$V(x) = \frac{U}{d} x.$$

Le potentiel varie donc linéairement.

Avec la charge d'espace électronique :

$$\rho < 0$$

et :

$$\Delta V > 0.$$

On obtient :

$$V(x) = U \left(\frac{x}{d} \right)^{4/3}$$

Le potentiel est donc courbe.

La loi de Child-Langmuir donne :

$$I \propto U^{3/2}$$

La diode à vide n'est donc pas un dipôle ohmique.

Bilan général du chapitre

Résultat important

Les équations locales fondamentales de l'électrostatique sont :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

et :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

Elles conduisent à :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

puis :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dans une région sans charge :

$$\Delta V = 0$$

L'étude de la diode à vide montre comment ces relations locales permettent de relier la distribution de charge, le potentiel, le champ électrique et une grandeur expérimentale mesurable : le courant électrique.